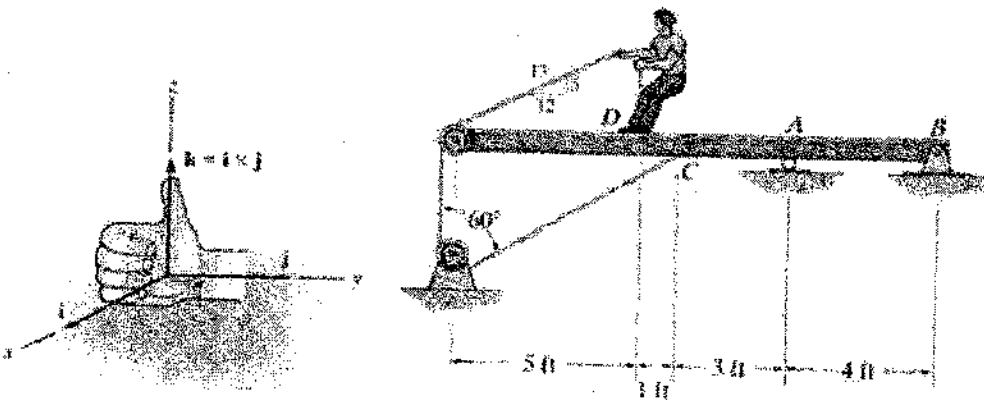


جامعة القادسيه
كلية العلوم
قسم الرياضيات

استاتيكا (١)

كود المقرر ١٠٣ و



مقدمة

يعتبر علم الاستاتيكا (السكون) من أقدم العلوم الرياضية التطبيقية إذ يعود تاريخ نشأته مع بداية النشأة الأولى للعلوم الهندسية. وتعني مادة " الاستاتيكا " أساساً بدراسة حالة الأجسام الواقعة تحت تأثير مجموعة من القوى ومحاولة اختزال هذه القوى الى أبسط صورة ممكنة وبحث شروط اتزانها. وعن السكون يقول القرآن الكريم: " ألم تر الي ربك كيف مد الظل ولو شاء لجعله ساكناً ثم جعلنا الشمس عليه دليلاً " (الفرقان: ٤٥) ، " وله ما سكن في الليل والنهار وهو السميع العليم " (الأنعام: ١٣) ، وفي التفسير "سكن" بمعنى استقام واتزن.

لقد روعي أن يكون محتوى الكتاب ومادته تناسبان مقررأ يدرس في فصل دراسي واحد ، مع الاهتمام بسهولة العبارات وتيسير لغتها الرياضية وتبسيطها كلما أمكن. وكذلك الاحتفاظ بالدقة العلمية والأصالة النظرية بالقدر الذي يحتاجه الطالب مع عرض المادة العلمية بأسلوب سهل ومشوق والتأكيد على المفاهيم الأساسية وتنمية مهارات الحل عند الطالب.

ويشتمل الكتاب على أربعة أبواب ، حيث يعرض الباب الأول لموضوع المتجهات وخصائصها والعمليات الجبرية المعرفة عليها وتطبيقاتها الهندسية وكذلك المعادلات الاتجاهية وطرق حلها وهذا الباب له أهمية كبرى في جميع الدراسات الرياضية والفيزيائية كما يعتبر مدخلاً أساسياً لعلم الاستاتيكا. أما الباب الثاني فيتعلق بالقوى في الفراغ وكيفية تحليلها وتركيبها ومفهوم وتعريف عزوم القوى حول نقطة أو محور والازدواج وعزمه مع الاهتمام بموضوع اختزال مجموعة من القوى الي قوة أو ازدواج أو كلاهما معا ، كما يهتم بدراسة اللولبية ومعادلة محورها وكذلك دراسة اتزان مجموعة من القوى. وخصص الباب الثالث لدراسة الاحتكاك والانزلاق والانقلاب للأجسام واحتكاك التدرج واحتكاك السيور والخيوط مع السطوح الاسطوانية. أما دراسة اتزان السلاسل والكتينة والخيوط الثقيلة القابلة للانحناء والكباري المعلقة فتم عرضها في الباب الرابع والأخير من هذا الكتاب.

ويحتوي هذا الكتاب أيضا علي عدد كبير من الأمثلة الرياضية المحولة بالتفصيل وكذلك علي عدد من التمارين والمسائل والتطبيقات الرياضية والهندسية والفيزيائية التي

تخدم الدارسين لهذا المقرر.

وتم عرض الموضوعات بناءا علي اللائحة الجديدة المطورة لكلية العلوم بالزقازيق (نظام الساعات المعتمدة - لائحة ٢٠١٥) حيث تحقق للطالب الانتقال التدريجي والربط السليم بين مادرسه في المرحلة الثانوية وماسيدرسه في الكلية ان شاء الله تعالى ، ويوجد في بداية هذا الكتاب عرض للخريطة التدريسية علي مدار الفصل الدراسي لهذا المقرر حيث تبين توزيع مفردات المقرر علي الأسابيع الدراسية ومواعيد الامتحانات الفصلية ، وهذا العرض يعين الطالب علي التحضير المسبق لموضوعات المحاضرات وللأستاذ المحاضر علي استيفاء شرحها وتوضيحها طبقا للجدول الزمني الموجود.

هذا الكتاب يعتبر ميعنا للدارسين بأقسام الرياضيات بكليتي العلوم والتربية كمادة أساسية من مواد الرياضيات التطبيقية وكذلك للدارسين بكليات الهندسة وشعبة " الميكنة الزراعية " بكليات الزراعة بالجامعات المصرية والعربية وكذلك للمعاهد الهندسية الخاصة.

نسأل الله العلي القدير أن نكون قد وفقنا في تقديم مادة علمية سهلة الاستيعاب ومفيدة للدارسين.

تحريرا في ٢٠١٥/٩/٥

الخريطة التدريسية للمقرر

كود المقرر ١٠٣ ر

اسم المقرر: استاتيكا (١)

الفصل الدراسي: الأول

مستل	الأسبوع	اسم الموضوع
١	الأول	الباب الأول: التعريف بالمتجهات وخواصها
٢	الثاني	ضرب المتجهات واستخداماته
٣	الثالث	حل المعادلات الاتجاهية
٤	الرابع	الباب الثاني: تعاريف (القوة - عزم القوة - الازدواج)
٥	الخامس	اختزال مجموعة من القوى إلى قوة - وإزدواج - لولية ومعادلة محورها
٦	السادس	اتزان مجموعة من القوى
٧	السابع	امتحان منتصف الفصل الدراسي
٨	الثامن	الباب الثالث: ردود الأفعال عند المفصلات الملساء و الاحتكاك
٩	التاسع	الانزلاق واتزان القضبان المتصلة واحتكاك السيور
١٠	العاشر	الباب الرابع: اتزان السلاسل والخيوط القابلة للانحناء - الكتينة وصور معادلتها
١١	الحادي عشر	اتزان أسلاك التلغراف والتليفونات والكبارى المعلقة
١٢	الثاني عشر	تطبيقات مختلفة
١٣	الثالث عشر	مراجعة والامتحانات الشفهية والتطبيقية للفصل الدراسي
١٤	الرابع عشر	الامتحانات النهائية النظرية للفصل الدراسي
١٥	الخامس عشر	

المحتويات

الصفحة

الموضوع

٥

الباب الأول: المتجهات

التعريف بالمتجهات وخواصها - ضرب المتجهات - حل المعادلات الاتجاهية
- أمثلة وتمارين محلولة.

٤٢

الباب الثاني: مجموعات القوى في الفراغ

تعريف (القوة - عزم القوة - الازدواج) - اختزال مجموعة من القوى إلى (قوة
وازدواج - لولبية) - اتران مجموعة من القوى - خطوط ومستويات الخمود -
القوى المترافقة - أمثلة وتمارين محلولة.

١١٢

الباب الثالث: بعض التطبيقات على القوى المستوية

ردود الأفعال عند المفصلات الملساء - الاحتكاك - أمثلة وتمارين محلولة

١٤٥

الباب الرابع: اتران السلاسل والخيوط القابلة للانحناء

الكتينة - المعادلة الذاتية - المعادلة الكرتيزية - المعادلات البرامترية - الشد
عند أى نقطة على منحني الكتينة - الكبارى المعلقة - أمثلة وتمارين محلولة.

١٨١

المراجع

الباب الأول

المتجهات فى الفراغ Three-dimensional vectors

١- التعريف بالمتجهات وخواصها :

١-١ مقدمة :

من الملاحظ أن الكميات الطبيعية نوعان:

الأول: كميات قياسية (Scalars) وهى الكميات التى يمكن التعبير عنها بمقدار فقط (مقياس) وهى لا تعتمد على الراصد سواء كان ساكنا أو متحركا. من أمثلة هذه الكميات القياسية : الزمن ، درجة الحرارة ، الكتلة ، المسافة ، والحجم ولكل منها وحداته الخاصة وهذه الكميات القياسية تخضع للعمليات الحسابية والجبرية العادية للأعداد.

الثانى: كميات متجهة (Vectors) وهى الكميات الطبيعية التى تحتاج فى تحديدها إلى نوعين مختلفين من الوحدات الأولى لتحديد المقدار Magnitude والأخرى لتحديد الاتجاه Direction. وبالتبع هذه الكميات الطبيعية تعتمد على الراصد (ساكن أو متحرك) ومن أمثلتها : الإزاحة بين نقطتين والقوة المؤثرة على جسم، وسرعة نقطة مادية، ... مثل هذه الكميات الاتجاهية تسمى "متجهات". ولا تكفى الرياضه العادية التى تخضع لها الأعداد لدراستها وإنما يوجد نوع جديد يطلق عليه جبر المتجهات. وهذا ما سنتطرق إليه بالتفصيل فى هذا الباب.

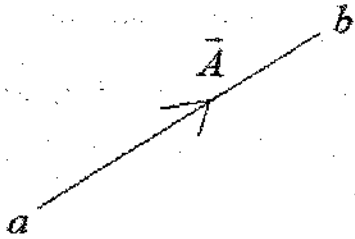
مثال توضيحي : إذا كان هناك شخصان A, B يركبان سيارة واحدة فإن سرعة الشخص B بالنسبة لراصد واقف على الطريق تساوى سرعة السيارة، بينما سرعة الشخص B بالنسبة لراصد آخر A معه فى السيارة تكون صفر. وبهذا يتضح أن السرعة تعتمد على الراصد ساكن أم متحرك ولهذا فإن السرعة كمية متجهة.

٢-١ متجه الإزاحة (Displacement vector):

فيما يلي سوف ندرس تفصيليا متجه الإزاحة وبالقياس يمكن التعميم على جميع

المتجهات. تتميز الإزاحة بالخواص الملموسة التالية:

إذا أزيحت نقطة مادية من الموضع a إلى الموضع b في الفراغ إنه يمكن تمثيلها بجزء من خط مستقيم ab طوله يتناسب مع الإزاحة



واتجاهه هو اتجاهها ويحدد هذا الخط سهم يميز

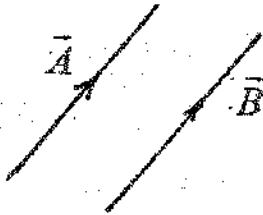
اتجاه الإزاحة (من a إلى b أو العكس) ويرمز له

بالرمز $\overrightarrow{ab}$ أو $\vec{A}$ حيث A طول المتجه (مقدار أو

مقياس المتجه) ويكتب المقدار

$$ab = |\overrightarrow{ab}| = |\vec{A}| = A$$

من هذا يتضح أن للإزاحة مقدارا واتجاها وتحدد تلك الإزاحة بمعرفة مقدارها



واتجاهها. ويقال أن الإزاحتان $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ متساويتان

إذا كانتا متساويتان في المقدار ولهما نفس الاتجاه.

$$\vec{A} = \vec{B}$$

(٢) قاعدة مثلث المتجهات (الإزاحات):

إذا أزيحت نقطة مادية من الموضع a إلى الموضع b ثم أزيحت من الموضع b

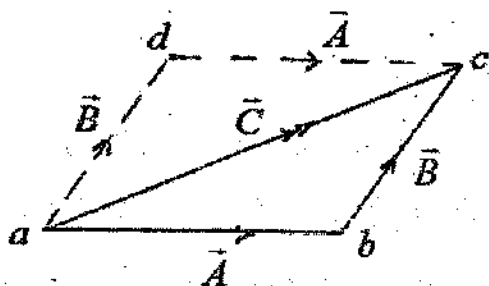
إلى الموضع c . فإن الإزاحة الأولى يمكن تمثيلها بالمتجه $\vec{A} = \overrightarrow{ab}$ والإزاحة الثانية

يمكن تمثيلها بالمتجه $\vec{B} = \overrightarrow{bc}$ ويكون تأثير المتجهين $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ على النقطة المادية بهذا

الترتيب هو انتقالها من الموضع a إلى الموضع c والذي يمكن تمثيله بالمتجه

$\vec{C} = \vec{ac}$. أى أن مجموع إزاحتين ممثلتين بضلعى مثلث مأخوذتين فى اتجاه دورى واحد هي الإزاحة التى تمثل بالضلع الذى يقفل المثلث فى عكس الاتجاه. تسمى هذه القاعدة بقاعدة مثلث المتجهات (الإزاحات) وتكتب

$$\vec{ab} + \vec{bc} = \vec{ac} \quad \text{or} \quad \vec{A} + \vec{B} = \vec{C} \quad (1-1)$$



واضح من الشكل المقابل أنه إذا أزيحت النقطة a أولا إلى الموضع d (الرأس الرابع فى متوازى الأضلاع $abcd$) ثم إلى

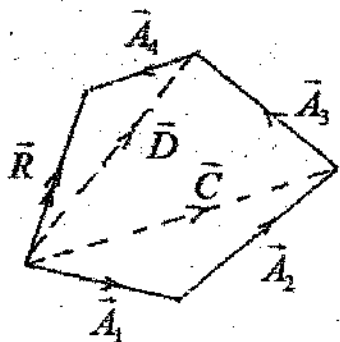
الموضع c فإن الإزاحة الأولى تكافئ $\vec{B}$ والإزاحة الثانية تكافئ $\vec{A}$ ، إذن

$$\vec{B} + \vec{A} = \vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$$

وذلك لأن تأثير الإزاحتين $\vec{A}, \vec{B}$ على النقطة المادية أدى إلى إنتقالها من الموضع a إلى الموضع c وذلك بغض النظر عن ترتيب حدوث الإزاحتين. يلاحظ أن المعادلة السابقة تحقق قانون التبديل فى جمع المتجهات.

٣- مضلع المتجهات (الإزاحات):

إذا مثلت مجموعة من المتجهات بأضلاع مضلع مأخوذة فى إتجاه دورى واحد فإن



مجموعها يمكن تمثيله بالمتجه الممثل بالضلع الذى يغلق المضلع فى عكس الاتجاه. أى أنه إذا مثلت المتجهات $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3, \vec{A}_4$ أربعة أضلاع من الشكل الخماسى كما بالشكل المقابل فإنه يمكن

كتابة :

$$\vec{R} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3 + \vec{A}_4 \quad (2-1)$$

ويمكن برهان ذلك باستخدام قاعدة مثلث المتجهات كما يلي:

$$\begin{aligned} L.H.S &= (\vec{A}_1 + \vec{A}_2) + \vec{A}_3 + \vec{A}_4 \\ &= (\vec{C} + \vec{A}_3) + \vec{A}_4 \\ &= \vec{D} + \vec{A}_4 = \vec{R} = R.H.S \end{aligned}$$

(٤) المتجه الصفري (Zero vector):

يمكن إدخال المتجه الصفري (متجه الإزاحة الصفري) ليعبر عن سكون الجسم

بالنسبة للراصد (وهذا المتجه طوله صفرا وفي أى اتجاه) ويرمز له عادة بالمتجه $\vec{0}$ ويحقق المعادلة

$$\vec{A} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{A} = \vec{A}$$

(٥) الإزاحة العكسية:

من مفهوم الإزاحة الصفريية يمكن إدخال مفهوم الإزاحة العكسية. فإذا كانت $\vec{A}$

إزاحة فإن $\vec{B}$ تسمى إزاحة عكسية للإزاحة $\vec{A}$ إذا كان $\vec{A} + \vec{B} = \vec{0}$ أى أن الجسم يعود

إلى موضعه الأصلي إذا أرحناه الإزاحة $\vec{A}$ ثم الإزاحة $\vec{B}$. ومن هذا يتضح أن الإزاحة

$\vec{B}$ تساوى الإزاحة $\vec{A}$ مقدارا وتخالفاها الاتجاه. أى أن $\vec{B} = -\vec{A}$.

١-٣ قوانين المتجهات الجبرية:

إذا كان m, n كميات قياسية، وكانت $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ متجهات فإن:

$$\left. \begin{aligned} \vec{A} + \vec{B} &= \vec{B} + \vec{A} \\ (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} &= \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) \end{aligned} \right\} \quad (3-1a)$$

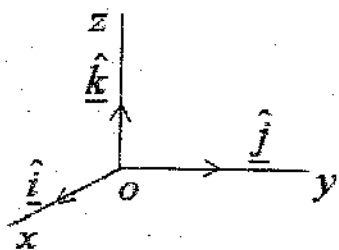
$$\left. \begin{aligned} m\vec{A} &= \vec{A}m \\ m(n\vec{A}) &= (mn)\vec{A} \\ (m+n)\vec{A} &= m\vec{A} + n\vec{A} \\ m(\vec{A} + \vec{B}) &= m\vec{A} + m\vec{B} \end{aligned} \right\} \quad (3-1b)$$

متجه الوحدة (Unit vector):

يعرف متجه الوحدة بأنه المتجه الذي مقداره يساوى الوحدة. وبذلك يمكن تمثيل أى متجه $\vec{A}$ الذى مقداره A ومتجه الوحدة فى إتجاهه هو $\hat{e}$ بالصورة

$$\vec{A} = A\hat{e} \Rightarrow \hat{e} = \frac{\vec{A}}{A} = \hat{A} \quad (4-1)$$

وعليه فإنه يمكن الحصول على متجه الوحدة لأى متجه $\vec{A}$ بقسمة هذا المتجه على مقداره. واضح أن $|\hat{e}| = |\hat{A}| = 1$ ، وبالتالي فإن متجه الوحدة هو متجه عادى ولكن مقداره الوحدة.

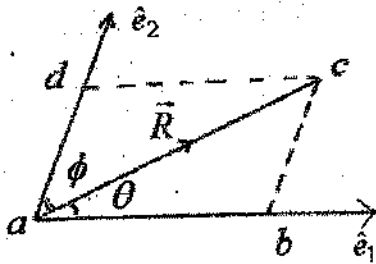


وهناك ثلاث متجهات وحدة هامة هى $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ وهى متجهات الوحدة فى اتجاه مجموعة المحاور الثلاثة المتعامدة x, y, z على الترتيب. وسوف نستعمل إتجاه عكس عقارب الساعة هو الإتجاه الموجب

(ما لم يذكر غير ذلك). وتسمى هذه المجموعة من المحاور بالمجموعة اليمينية المتعامدة.

٤-١ تحليل المتجه إلى مركبتين :

يراد تحليل المتجه $\vec{R}$ في أى اتجاهين اختياريين $\hat{e}_1, \hat{e}_2$. ولكى يكون ذلك ممكناً يجب أن يضم المتجه $\vec{R}$ والمتجهين $\hat{e}_1, \hat{e}_2$ مستوى واحد (أنظر الشكل). المتجه $\vec{R}$ تم تمثيله مقداراً واتجهاً بالقطر $\vec{ac}$ فى متوازي الأضلاع $abcd$ ، حيث θ الزاوية التى يصنعها $\vec{R}$ مع $\hat{e}_1$ ، ϕ الزاوية التى يصنعها $\vec{R}$ مع $\hat{e}_2$.



باستخدام قاعدة مثلث المتجهات

على المثلث abc يكون

$$\vec{ac} = \vec{ab} + \vec{bc}$$

$$\therefore \vec{R} = ab\hat{e}_1 + bc\hat{e}_2 \quad (i)$$

وبتطبيق قاعدة الجيب على نفس المثلث فإن

$$\frac{ab}{\sin \phi} = \frac{bc}{\sin \theta} = \frac{R}{\sin(\theta + \phi)}$$

وبالتالى يكون

$$\left. \begin{aligned} ab &= \frac{R \sin \phi}{\sin(\theta + \phi)}, \\ bc &= \frac{R \sin \theta}{\sin(\theta + \phi)} \end{aligned} \right\} \quad (ii)$$

بالتعويض من (ii) فى (i) نحصل على

$$\vec{R} = \frac{R \sin \phi}{\sin(\theta + \phi)} \hat{e}_1 + \frac{R \sin \theta}{\sin(\theta + \phi)} \hat{e}_2 \quad (iii)$$

نتيجة : إذا كان $\hat{e}_1, \hat{e}_2$ متعامدان أى أن $\theta + \phi = \frac{\pi}{2}$ ومنها $\phi = \frac{\pi}{2} - \theta$.

وبالتعويض فى (iii) نحصل على

$$\vec{R} = R \cos \theta \hat{e}_1 + R \sin \theta \hat{e}_2 \quad (5-1)$$

٥-١ تمثيل النقطة فى الفراغ :

من المعلوم أنه يتم تمثيل النقطة فى المستوى oxy بدلالة الإحداثيين (x, y) . حيث

يمثل الإحداثى الأول x طول العمود الساقط من النقطة على محور oy ، ويمثل

الإحداثى الثانى y طول العمود الساقط من

النقطة على محور ox . والآن يجب التعرف

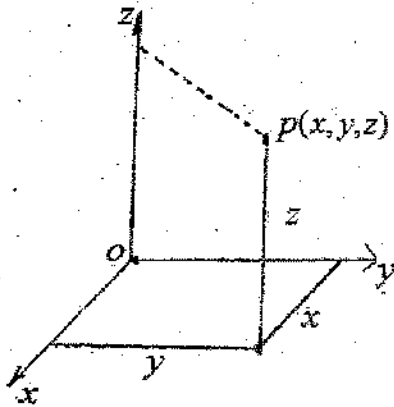
على كيفية تمثيل نقطة ما p فى الفراغ ثلاثى

الأبعاد $oxyz$. يتم تمثيل النقطة فى هذا الفراغ

بدلالة ثلاثة إحداثيات (x, y, z) حيث يمثل

الإحداثى الأول x طول العمود الساقط من

النقطة على المستوى oyz ، ويمثل الإحداثى



الثانى y طول العمود الساقط من النقطة على المستوى oxz ، كما يمثل الإحداثى

الثالث z طول العمود الساقط من النقطة على المستوى oyz . وبالتالي إذا وقعت النقطة

على أحد الإحداثيات الثلاث ox, oy, oyz فإنها تقع فى المستويين الذين يحتويان هذا

المحور ويكون طول العمود الساقط من النقطة على أى منهما منعدماً. وإذا وقعت النقطة

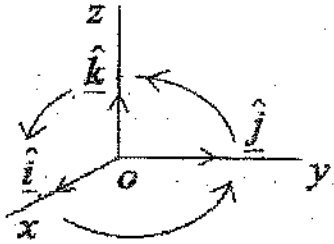
فى أحد المستويات الثلاث oxy, oyz, oxz فإن طول العمود الساقط من النقطة على هذا

المستوى يساوى الصفر.

تمثيل المتجه بدلالة مركباته : (باستخدام الإحداثيات الكارتيزية)

باختيار مجموعة المحاور المتعامدة x, y, z على الترتيب وسوف نأخذ اتجاه عكس

عقارب الساعة هو الاتجاه الموجب كما بالشكل أسفل (ما لم يذكر عكس ذلك).



نفرض أن $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ متجهات الوحدة في هذه

الاتجاهات الثلاثة على الترتيب (انظر الشكل

المقابل). إذا كان لدينا المتجه $\vec{A}$ فإن مساقطه الثلاثة

على المحاور الكارتيزية x, y, z هي

على الترتيب فإن المطلوب الآن هو كتابة المتجه $\vec{A}$ بدلالة هذه المركبات.

من الشكل التالي واضح أن المتجه $\vec{A}$ يمثل بالقطر ob' في متوازي المستطيلات

$oabc o'a'b'c'$ المقام على المحاور الثلاثة. من الشكل واضح أن

$$A_x = oa = o'a' = cb = c'b'$$

$$A_y = oc = o'c' = ab = a'b'$$

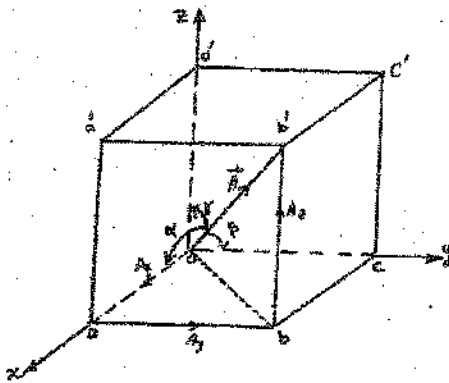
$$A_z = oo' = aa' = bb' = cc'$$

بتطبيق قاعدة مضلع المتجهات

$$\vec{ob'} = \vec{oa} + \vec{ab} + \vec{bb'}$$

$$\Rightarrow \vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z$$

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \quad (6-1)$$



ولإيجاد مقدار هذا المتجه

$$\therefore (ob')^2 = (ob)^2 + (bb')^2$$

$$\therefore (ob')^2 = (oa)^2 + (ab)^2 + (bb')^2$$

$$\therefore A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (7-1)$$

إذا كان المتجه $\vec{A}$ يصنع الزوايا α, β, γ مع محاور الإحداثيات x, y, z على الترتيب فإنه من الشكل يتضح أن جيوب تمام الاتجاه لهذا المتجه

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{oa}{ob'} = \frac{A_x}{A} = \ell, \\ \cos \beta &= \frac{oc}{ob'} = \frac{A_y}{A} = m, \\ \cos \gamma &= \frac{oo'}{ob'} = \frac{A_z}{A} = n \end{aligned} \right\} \quad (8-1)$$

بقسمة طرفي المعادلة (7-1) على A^2 واستخدام (8-1):

$$1 = \frac{A_x^2}{A^2} + \frac{A_y^2}{A^2} + \frac{A_z^2}{A^2}$$

$$\therefore \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

متجه الوحدة بدلالة مركباته :

من التعريف $\hat{A} = \frac{\vec{A}}{A}$ وباستخدام المعادلة (6-1) يكون

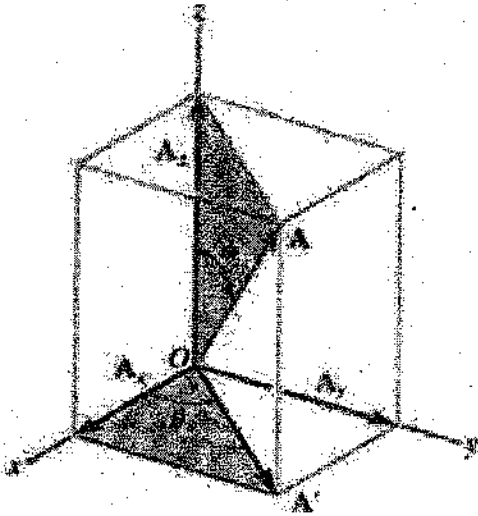
$$\hat{A} = \frac{A_x}{A} \hat{i} + \frac{A_y}{A} \hat{j} + \frac{A_z}{A} \hat{k}$$

ومن المعادلة (8-1) نحصل على

$$\hat{A} = \cos \alpha \hat{i} + \cos \beta \hat{j} + \cos \gamma \hat{k}$$

أى أن مركبات متجه الوحدة لأى متجه هى جيوب تمام الإتجاه لهذا المتجه مع المحاور الأساسية ox, oy, oz على الترتيب.

أيضاً يمكن إيجاد مركبات المتجه إذا ما علم زاوية ميله على أحد محاور الإحداثيات والزاوية التى يصنعها المستوى الذى يحتوى على هذا المحور والمتجه نفسه مع محور آخر من محاور الإحداثيات.



بفرض أن اتجاه المتجه $\vec{A}$ يحدد بالزوايتين θ, ϕ كما بالشكل المقابل. أولاً نقوم بتحليل المتجه $\vec{A}$ فى الاتجاهين المتعامدين oz, oA' :

$$A_z = A \cos \phi, \quad oA' = A \sin \phi$$

ثم نقوم بتحليل المركبة oA' فى

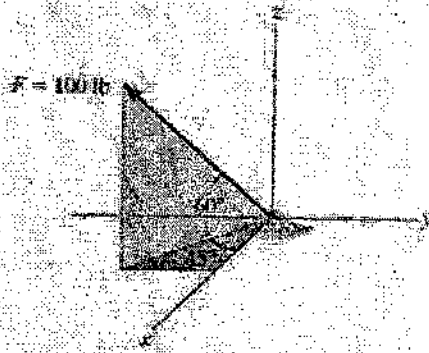
اتجاه المحورين ox, oy لنحصل على

$$A_x = A \sin \phi \cos \theta, \quad A_y = A \sin \phi \sin \theta$$

وبالتالى يمكن كتابة المتجه فى الاحداثيات الكارتيزية بالصورة

$$\vec{A} = A \sin \phi \cos \theta \hat{i} + A \sin \phi \sin \theta \hat{j} + A \cos \phi \hat{k}$$

وعلى سبيل المثال فإنه يمكن التعبير عن متجه القوة المبينة بالشكل المقابل على الصورة:



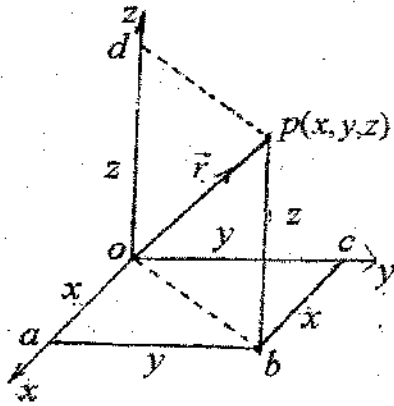
$$F_x = 100 \sin 60^\circ \cos 45^\circ = 35.4 \text{ lb}$$

$$F_y = 100 \sin 60^\circ \sin 45^\circ = 35.4 \text{ lb}$$

$$F_z = 100 \cos 60^\circ = 86.6 \text{ lb}$$

متجه الموضع (Position vector):

إذا كانت النقطة p في الفراغ إحداثياتها (x, y, z) فإن المتجه الذى يحدد



موقع النقطة p في الفراغ هو $\vec{op}$

ونرمز له

بـ $\vec{r}$ ويسمى متجه الموضع للنقطة p .

كذلك مساقط $\vec{r}$ على محاور الإحداثيات

هى

$$x=oa, \quad y=oc, \quad z=od$$

ومن مضلع المتجهات

$$\vec{op} = \vec{oa} + \vec{ab} + \vec{bp}$$

$$\therefore \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad (9-1)$$

أى أن مركبات متجه الموضع لأى نقطة هى إحداثيات النقطة.

متجه الإزاحة فى الاحداثيات الكارتيزية :

إن متجه الإزاحة بين النقطتين أولهما $P_1(x_1, y_1, z_1)$ وثانيهما $P_2(x_2, y_2, z_2)$ هو $\overline{P_1P_2}$ أو $\vec{r}_{21}$ وإذا اعتبرنا متوازي المستطيلات الذى له القطر $\overline{P_1P_2}$ وتكون أضلاعه موازية للمحاور الأساسية يمكن تكوين المتجه $\overline{P_1P_2}$ بجمع المتجهات الثلاثة.

$$\overline{P_1P'} = (y_2 - y_1) \underline{j}, \quad \overline{P'P''} = -(x_1 - x_2) \underline{i}, \quad \overline{P''P_2} = (z_2 - z_1) \underline{k}$$

والمبينة على الرسم.

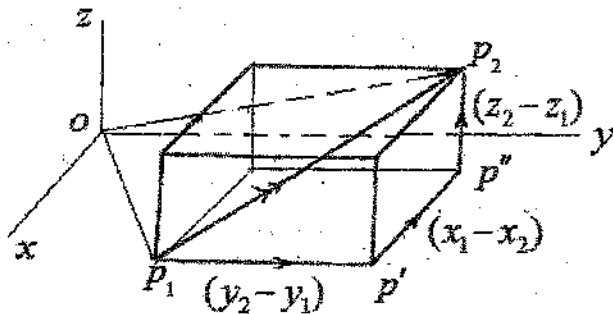
$$\therefore \overline{P_1P_2} = \overline{P_1P'} + \overline{P'P''} + \overline{P''P_2}$$

$$\overline{P_1P_2} = \vec{r}_{21} = (x_2 - x_1) \underline{i} + (y_2 - y_1) \underline{j} + (z_2 - z_1) \underline{k} \quad (10-1)$$

حيث متجه الموضع للنقطة $P_1(x_1, y_1, z_1)$ هو

$$\overline{OP_1} = \vec{r}_1 = x_1 \underline{i} + y_1 \underline{j} + z_1 \underline{k} \quad (11-1)$$

ومتجه الموضع للنقطة $P_2(x_2, y_2, z_2)$ هو



$$\overline{OP_2} = \vec{r}_2 = x_2 \underline{i} + y_2 \underline{j} + z_2 \underline{k} \quad (12-1)$$

ومن الشكل واضح أن المتجهات الثلاثة $\overrightarrow{op_1}$, $\overrightarrow{op_2}$, $\overrightarrow{p_1p_2}$ تكون أضلاع المثلث op_1p_2 بحيث تتحقق المعادلة الاتجاهية

$$\overrightarrow{p_1p_2} = \overrightarrow{op_2} - \overrightarrow{op_1} \quad (13-1)$$

وباستخدام (10-1) نحصل على متجه الإزاحة :

$$\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (13-1)'$$

$$\therefore \vec{r}_{21} = (x_2 - x_1)\underline{\hat{i}} + (y_2 - y_1)\underline{\hat{j}} + (z_2 - z_1)\underline{\hat{k}} \quad (13-1)''$$

حيث

$$\vec{r}_1 = x_1\underline{\hat{i}} + y_1\underline{\hat{j}} + z_1\underline{\hat{k}}, \quad \vec{r}_2 = x_2\underline{\hat{i}} + y_2\underline{\hat{j}} + z_2\underline{\hat{k}}$$

يلاحظ إذاً من المعادلتين (13-1)', (13-1)'' أن طرح متجهين يتأتى أيضاً بطرح المركبات المناظرة.

بالمقارنة بمتجه الإزاحة يمكن تعميم قانون جمع وطرح المتجهات. إذا كان لدينا المتجهات $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ بدلالة مركباتهما على الصورة:

$$\vec{A} = A_x\underline{\hat{i}} + A_y\underline{\hat{j}} + A_z\underline{\hat{k}}, \quad \vec{B} = B_x\underline{\hat{i}} + B_y\underline{\hat{j}} + B_z\underline{\hat{k}}$$

فإن

$$\vec{A} \pm \vec{B} = (A_x \pm B_x)\underline{\hat{i}} + (A_y \pm B_y)\underline{\hat{j}} + (A_z \pm B_z)\underline{\hat{k}} \quad (14-1)$$

مثال (١):

يتحرك جسيم في خط مستقيم من النقطة $p_1(1, -1, 2)$ إلى النقطة $p_2(3, -2, 4)$. أوجد متجه الإزاحة و المسافة بين النقطتين ، ثم أوجد متجه الوحدة له.

الحل:

متجه موضع النقطة p_1 هو $\vec{r}_1 = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ ومتجه موضع النقطة p_2 هو

$\vec{r}_2 = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ فيكون متجه الإزاحة $\overrightarrow{p_1 p_2}$ هو $\vec{r}_{21}$ حيث

$$\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$$

والمسافة المقطوعة بين النقطتين تساوى مقياس المتجه $\vec{r}_{21}$ أى أنها تساوى

$$r_{21} = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (2)^2} = 3$$

متجه الوحدة $\hat{e}$ لمتجه الإزاحة هو

$$\hat{e} = \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}} = \frac{1}{3}(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$$

مثال (٢):

أوجد متجه الوحدة الموازى لمحصلة المتجهات $\underline{F}_1 = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

$$\underline{F}_3 = -\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}, \underline{F}_2 = 2\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k}$$

الحل:

نجد أولاً المتجه $\underline{F}$ الناتج من مجموع المتجهات الثلاثة المعطاة

$$\therefore \underline{F} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3$$

$$= (3+2-1)\hat{i} + (-2-4+2)\hat{j} + (1-3+2)\hat{k} = 4\hat{i} - 4\hat{j} \quad (i)$$

$$\Rightarrow F = |\underline{F}| = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2} \quad (ii)$$

متجه الوحدة $\hat{e}$ الموازى للمحصلة $\underline{F}$ هو متجه وحدة فى إتجاه المحصلة ويساوى

$$\hat{e} = \frac{F}{F} = \frac{4\hat{i} - 4\hat{j}}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i} - \hat{j})$$

(٢) ضرب المتجهات:

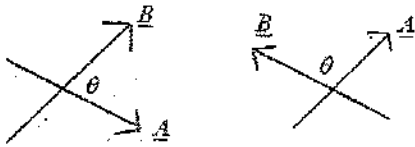
عند ضرب الكميات القياسية فإن الناتج لابد أن يكون كمية قياسية أيضا. لكن عند ضرب المتجهات إذا كان الناتج كمية قياسية يطلق على عملية الضرب هذه بالضرب القياسي Scalar Product ، أما إذا كان ناتج عملية ضرب المتجهات كمية اتجاهية فيطلق على عملية الضرب هذه بالضرب الاتجاهي Vector Product .

١-٢ ضرب القياسي لمتجهين : Scalar Product Of Two Vectors

يعرف حاصل الضرب القياسي للمتجهين $\underline{A}, \underline{B}$ بأنه حاصل ضرب مقداري هذين المتجهين وجيب تمام الزاوية بينهما (بحيث يكون المتجهان خارجا أو داخلا لنقطة التقاطع). ويرمز له عادة بالرمز $\underline{A} \cdot \underline{B}$ ، أي أن

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = AB \cos \theta, \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

حيث θ الزاوية المحصورة بين المتجهين. ويسمى هذا النوع من الضرب بالضرب الثنائي الاتجاهي.



خواص الضرب القياسي لمتجهين :

- (١) إذا كان حاصل الضرب القياسي لمتجهين يساوى الصفر فإنه إما أن يكون أحد المتجهين صفريا أو يكون المتجهان متعامدان.

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = 0 \rightarrow \begin{cases} \underline{A} = \underline{0} \text{ or } \underline{B} = \underline{0} \\ \underline{A} \perp \underline{B} \end{cases}$$

(٢) الشرط اللازم والكافى لكى يكون متجهان غير صفريان متعامدين هو أن يكون حاصل ضربيهما القياسى مساوياً للصفر.

أى أنه إذا كان $\underline{B} \neq \underline{0}$ أو $\underline{A} \neq \underline{0}$ ، وكان $\underline{A} \cdot \underline{B} = 0$ فإن المتجهين $\underline{A}$ و $\underline{B}$ يكونا متعامدين.

(٣) حاصل الضرب القياسى بين متجهين يكون موجباً إذا كانت الزاوية بينهما حادة، وسالباً إذا كانت الزاوية بينهما منفرجة.

(٤) يعرف مربع المتجه $\underline{A}$ بأنه

$$(\underline{A})^2 = \underline{A} \cdot \underline{A} = |\underline{A}|^2 = A^2$$

(٥) عملية التبديل فى الضرب الثنائى القياسى متحققة ، حيث

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{B} \cdot \underline{A} = AB \cos \theta$$

(٦) من السهل إثبات أن:

$$\lambda (\underline{A} \cdot \underline{B}) = (\lambda \underline{A}) \cdot \underline{B} = \underline{A} \cdot (\lambda \underline{B})$$

$$\underline{A} \cdot (\underline{B} \pm \underline{C}) = \underline{A} \cdot \underline{B} \pm \underline{A} \cdot \underline{C}$$

حيث λ كمية قياسية.

(٧) مسقط المتجه $\underline{A}$ على المتجه $\underline{B}$ (أى مقدار مركبه $\underline{A}$ فى إتجاه $\underline{B}$) نحصل عليه

بضرب $\underline{A}$ قياسياً فى متجه الوحدة للمتجه $\underline{B}$ أى يساوى $\underline{A} \cdot \hat{\underline{B}}$ من الشكل المقابل طول

المسقط المطلوب هو $A \cos \theta$ وهذا يساوى $\underline{A} \cdot \hat{\underline{B}}$

الزاوية بين المتجهين نحصل عليها من
المعادلة (15-1)



$$\cos \theta = \frac{\underline{A} \cdot \underline{B}}{AB} = \hat{\underline{A}} \cdot \hat{\underline{B}} \quad (16-1)$$

حاصل الضرب القياسي لأى اثنين من متجهات الوحدة $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ فى إتجاه المحاور المتعامدة ox, oy, oz :

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0, \quad \hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1 \quad (17-1)$$

(٨) حاصل الضرب الثنائى القياسى بدلالة المركبات إذا كان لدينا المتجهين $\underline{A}$ و $\underline{B}$ على الصورة

$$\underline{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k},$$

$$\underline{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$$

فإن حاصل الضرب القياسى لهما:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \cdot (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k})$$

وبإجراء عملية الضرب القياسى السابقة مع استخدام خواص الضرب القياسى نحصل على العلاقة الهامة:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (18-1)$$

مثال (٣): أوجد الزاوية بين المتجهين $\underline{A} = (2, 2, -1), \underline{B} = (3, 12, 4)$

الحل:

$$\underline{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k} \Rightarrow A = \sqrt{4+4+1} = 3$$

$$\underline{B} = 3\hat{i} + 12\hat{j} + 4\hat{k} \Rightarrow A = \sqrt{9 + 144 + 16} = 13$$

$$\therefore \underline{A} \cdot \underline{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = 6 + 24 - 4 = 26$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\underline{A} \cdot \underline{B}}{AB} = \frac{26}{(3)(13)} = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

مثال (٤): أوجد مسقط المتجه $\underline{A} = (-2, 2, 1)$ على المتجه $\underline{B} = (3, 1, 0)$

الحل:

مسقط المتجه $\underline{A}$ على المتجه $\underline{B}$ هو

$$\underline{A} \cdot \hat{\underline{B}} = \frac{\underline{A} \cdot \underline{B}}{B} = \frac{-4}{\sqrt{10}}$$

والإشارة السالبة تعنى أن المسقط على امتداد المتجه $\underline{B}$ (أى أن الزاوية بينهما منفردة).

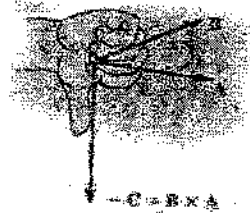
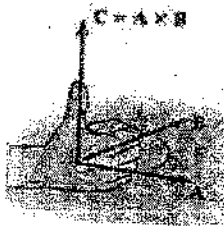
٢-٢ ضرب الاتجاهي لمتجهين: Vector Product of Two Vectors

يعرف حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين $\underline{A}, \underline{B}$ بأنه متجه مقداره حاصل ضرب

مقدارى المتجهين A, B وجيب الزاوية بينهما $\sin \theta$ وينطبق اتجاهه على العمودى

على المستوى الذى يجمع المتجهين $\underline{A}, \underline{B}$. ويكتب عادة على الصورة

$$\underline{C} = \underline{A} \wedge \underline{B} = AB \sin \theta \hat{n} \quad (19-1)$$

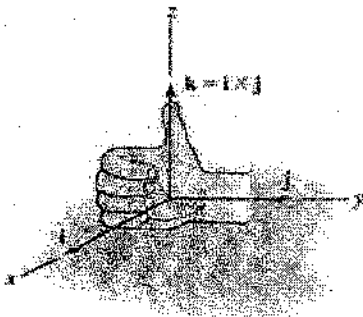


فإن المتجهات $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ تكون مجموعة يمينية حيث θ الزاوية بين المتجهين $\underline{A}, \underline{B}$ و $\hat{n}$ متجه الوحدة العمودى على المستوى الذى يجمع المتجهين $\underline{A}, \underline{B}$ وبخضع اتجاهه لقاعدة اليد اليمنى (أو للمجموعة اليمنى).

خواص الضرب الاتجاهى :

(١) من التعريف (1-19) نستنتج أن

$$\underline{A} \wedge \underline{B} = -\underline{B} \wedge \underline{A}$$



$$\underline{\hat{i}} \wedge \underline{\hat{i}} = \underline{\hat{j}} \wedge \underline{\hat{j}} = \underline{\hat{k}} \wedge \underline{\hat{k}} = \underline{0} \quad (٢)$$

$$\underline{\hat{i}} \wedge \underline{\hat{j}} = \underline{\hat{k}}, \quad \underline{\hat{j}} \wedge \underline{\hat{k}} = \underline{\hat{i}}, \quad \underline{\hat{k}} \wedge \underline{\hat{i}} = \underline{\hat{j}}$$

$$\underline{\hat{j}} \wedge \underline{\hat{i}} = -\underline{\hat{k}}, \quad \underline{\hat{k}} \wedge \underline{\hat{j}} = -\underline{\hat{i}}, \quad \underline{\hat{i}} \wedge \underline{\hat{k}} = -\underline{\hat{j}}$$

(٣) الشرط اللازم والكافى لى يتوازي متجهان غير صفريان هو أن يتلاشى حاصل ضربهما الاتجاهى، أى أن $\underline{A} \wedge \underline{B} = \underline{0}$. وبالتالي فإنه إذا كان

$$\underline{A} \wedge \underline{B} = \underline{0}, \quad \underline{A} \neq \underline{0}, \quad \underline{B} \neq \underline{0}$$

فإن المتجهين $\underline{A}$ ، $\underline{B}$ متوازيين.

$$(i) \lambda(\underline{A} \wedge \underline{B}) = (\lambda \underline{A}) \wedge \underline{B} = \underline{A} \wedge (\lambda \underline{B}), \quad (٤)$$

$$(ii) \underline{A} \wedge (\underline{B} + \underline{C}) = \underline{A} \wedge \underline{B} + \underline{A} \wedge \underline{C} \quad \text{حيث } \lambda \text{ بارامتر}$$

(٥) إذا كان لدينا المتجهان

$$\underline{A} = A_x \underline{\hat{i}} + A_y \underline{\hat{j}} + A_z \underline{\hat{k}},$$

$$\underline{B} = B_x \underline{\hat{i}} + B_y \underline{\hat{j}} + B_z \underline{\hat{k}}$$

$$\therefore \underline{A} \wedge \underline{B} = (A_x \underline{\hat{i}} + A_y \underline{\hat{j}} + A_z \underline{\hat{k}}) \wedge (B_x \underline{\hat{i}} + B_y \underline{\hat{j}} + B_z \underline{\hat{k}})$$

$$= (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (20-1)$$

مثال (٥) : اثبت صحة مطابقة لاجرانج :

$$|\underline{A} \wedge \underline{B}|^2 + |\underline{A} \cdot \underline{B}|^2 = A^2 B^2 \quad (21-1)$$

الحل: نفرض أن الزاوية بين المتجهين $\underline{A}$ ، $\underline{B}$ هي θ . لذا فإن

$$\begin{aligned} \therefore L.H.S. &= |AB \sin \theta \hat{n}|^2 + |AB \cos \theta|^2 \\ &= A^2 B^2 \sin^2 \theta + A^2 B^2 \cos^2 \theta \\ &= A^2 B^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = A^2 B^2 = R.H.S. \end{aligned}$$

مثال (٦): أوجد شرط توازي المتجهين:

$$\underline{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}, \quad \underline{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$$

الحل: نعلم أن شرط التوازي للمتجهين $\underline{A}, \underline{B}$ هو $\underline{A} \wedge \underline{B} = \underline{0}$

$$\therefore \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \underline{0}$$

وبمساواة المركبات بالصفر نجد أن

$$A_y B_z - A_z B_y = 0 ,$$

$$A_z B_x - A_x B_z = 0 ,$$

$$A_x B_y - A_y B_x = 0$$

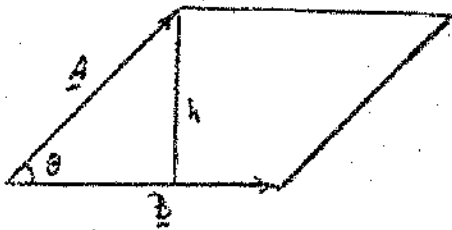
ومن المعادلات السابقة نحصل على شرط التوازي:

$$\frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z} \quad (22-1)$$

أي أن شرط توازي متجهين هو تناسب مركباتهما. أي أن $\underline{A} = k\underline{B}$ حيث k عدد حقيقي.

مثال (٧): أثبت أن مساحة متوازي الأضلاع المكون من المتجهين $\underline{A}$, $\underline{B}$ تساوي

$$|\underline{A} \wedge \underline{B}|$$



الحل:
مساحة متوازي الأضلاع

تساوي

$$h|\underline{B}| = |\underline{A}| \sin \theta \cdot |\underline{B}|$$

$$= |\underline{A}||\underline{B}| \sin \theta = |\underline{A} \wedge \underline{B}|$$

ملحوظة: طول العمود h (= مركبة $\underline{A}$ العمودية على $\underline{B}$)

$$h = \frac{|\underline{A} \wedge \underline{B}|}{|\underline{B}|} = |\underline{A} \wedge \hat{\underline{B}}|$$

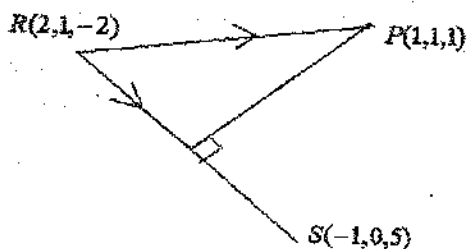
مثال (٨):

أوجد طول العمود النازل من النقطة $P(1,1,1)$ على المستقيم الواصل بين النقطتين

$$R(2,1,-2), S(-1,0,5)$$

الحل:

طول العمود النازل من النقطة P على المستقيم الوصل بين النقطتين R, S يساوي



$$h = \frac{|\overline{RP} \wedge \overline{RS}|}{|\overline{RS}|}$$

$$\therefore \overline{RP} = (1,1,1) - (2,1,-2) = -\hat{i} + 3\hat{k},$$

$$\overline{RS} = (-1,0,5) - (2,1,-2) = -3\hat{i} - \hat{j} + 7\hat{k}$$

$$\therefore \overline{RP} \wedge \overline{RS} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 0 & 3 \\ -3 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k},$$

$$|\overline{RS}| = \sqrt{9+1+49} = \sqrt{59},$$

$$|\overline{RP} \wedge \overline{RS}| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{\frac{14}{59}}$$

٣-٢ الضرب الثلاثي القياسي: Triple Scalar Product

يرمز لحاصل الضرب الثلاثي القياسي للمتجهات الثلاثة $\underline{A}$ ، $\underline{B}$ ، $\underline{C}$ بالرمز $\underline{A} \cdot (\underline{B} \wedge \underline{C})$ أو $(\underline{B} \wedge \underline{C}) \cdot \underline{A}$. أي نضرب أولاً $\underline{B}$ ، $\underline{C}$ (تجاهياً والمتجه الناشئ نضربه قياسياً في $\underline{A}$ فينتج لنا كمية قياسية تسمى بحاصل الضرب الثلاثي القياسي للمتجهات $\underline{A}$ ، $\underline{B}$ ، $\underline{C}$).

خواص الضرب الثلاثي القياسي :

١- إذا كانت مركبات المتجهات $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ هي

$$\underline{A} = (A_x, A_y, A_z), \quad \underline{B} = (B_x, B_y, B_z), \quad \underline{C} = (C_x, C_y, C_z)$$

فإن

$$\underline{A} \cdot (\underline{B} \wedge \underline{C}) = (\underline{B} \wedge \underline{C}) \cdot \underline{A} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \quad (23-1)$$

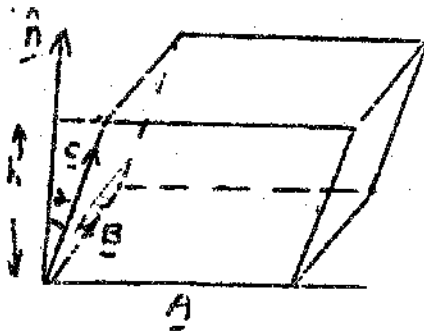
٢- باستخدام خواص المحددات يمكن إثبات أن

$$\underline{A} \cdot (\underline{B} \wedge \underline{C}) = \underline{B} \cdot (\underline{C} \wedge \underline{A}) = \underline{C} \cdot (\underline{A} \wedge \underline{B}) = [\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}] \quad (24-1)$$

٣- يتغير حاصل الضرب الثلاثي القياسي في الإشارة إذا بدلنا مواضع متجهين في المتجهات الداخلة في التركيب (وهذا واضح من خواص المحددات).

٤- حاصل الضرب الثلاثي القياسي للمتجهات $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ يساوى حجم متوازي السطوح

الذي أحرفه $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ كما بالشكل



$$[\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}] = (\underline{A} \wedge \underline{B}) \cdot \underline{C} \\ = |\underline{A} \wedge \underline{B}| \hat{n} \cdot \underline{C}$$

$$\therefore [\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}] = |\underline{A} \wedge \underline{B}| h$$

حيث h ارتفاع متوازي السطوح، $|\underline{A} \wedge \underline{B}|$

مساحة متوازي الأضلاع (القاعدة) المكون

من $\underline{A}, \underline{B}$. إذن حاصل الضرب الثلاثي القياسي يساوى حجم متوازي السطوح.

٥- إذا كان $[\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}] = 0$ فإما

- هنالك على الأقل متجه من الثلاثة صفري
 - أو متجهان من الثلاثة على الأقل متوازيين
 - أو المتجهات الثلاثة تقع في مستوى واحد.
- وبالتالى فإن شرط وقوع ثلاث متجهات (غير صفرية) في مستوى واحد هو أن يكون حاصل ضربيهما الثلاثي القياسى مساويا للصفر.

مثال (٩):

اثبت أن المتجهات الثلاثة $\underline{A} = (2, 1, 5)$, $\underline{B} = (3, -2, 2)$, $\underline{C} = (-5, 8, 4)$ تقع في مستوى واحد.

الحل:

$$\underline{A} \cdot (\underline{B} \wedge \underline{C}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 2 \\ -5 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

ومنها تكون المتجهات $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ تقع في مستوى واحد.

مثال (١٠):

أوجد قيمة الثابت λ حتى يتسنى رسم المتجهات الثلاث الآتية في مستوى

$$\underline{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}, \quad \underline{B} = \hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}, \quad \underline{C} = \hat{i} + \lambda\hat{j}$$

الحل :

لكي يتسنى رسم ثلاثة متجهات في مستوى واحد ، يجب أن تقع هذه المتجهات في نفس

المستوى. وبالتالي يجب أن تتحقق العلاقة $\underline{A} \cdot (\underline{B} \wedge \underline{C}) = 0$

$$\therefore \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & \lambda & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{5}{8}$$

مثال (١١) :

إذا كان $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ ، أثبت أن المتجهات $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ تقع في مستوى واحد.

الحل :

بضرب المعادلة المعطاة من اليسار اتجاهياً في المتجه $\vec{b}$ واستخدام خواص الضرب الثلاثي الاتجاهي نجد أن

$$\vec{b} \wedge \vec{a} + \vec{b} \wedge \vec{c} = \vec{0}$$

بضرب المعادلة السابقة قياسياً في المتجه $\vec{a}$ واستخدام خواص الضرب الثلاثي القياسي نجد أن $\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = 0$ وحيث أن المتجهات $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ مختلفة فإن ذلك يتحقق عندما تقع هذه المتجهات في مستوى واحد.

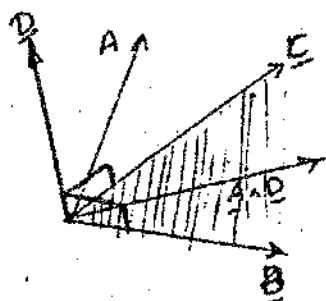
٤-٢- الضرب الثلاثي الاتجاهي : Triple Vector Product

يسمى ناتج العملية $\underline{A} \wedge (\underline{B} \wedge \underline{C})$ بحاصل الضرب الثلاثي الاتجاهي للمتجهات $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ وواضح أن حاصل الضرب الاتجاهي $\underline{B} \wedge \underline{C}$ ينشأ متجهه وليكن $\underline{D}$ ويكون عمودياً على كل من $\underline{B}, \underline{C}$ ثم نضرب $\underline{A} \wedge \underline{D}$ فينشأ متجه عمودي على $\underline{A}$ و $\underline{D}$ أي أنه يقع في مستوى $\underline{B}, \underline{C}$ وبالتالي يمكن كتابته

$$\underline{A} \wedge (\underline{B} \wedge \underline{C}) = \lambda \underline{B} + \mu \underline{C} \quad (i)$$

حيث λ, μ عدنان قياسيان.

بضرب طرفي (i) قياسياً في $\underline{A}$:



$$\therefore 0 = \lambda(\underline{A} \cdot \underline{B}) + \mu(\underline{A} \cdot \underline{C})$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{\underline{A} \cdot \underline{C}} = -\frac{\mu}{\underline{A} \cdot \underline{B}} = \nu \quad (ii)$$

بالتعويض عن λ ، μ من (ii) في (i) نجد أن

$$\underline{A} \wedge (\underline{B} \wedge \underline{C}) = \nu[(\underline{A} \cdot \underline{C})\underline{B} - (\underline{A} \cdot \underline{B})\underline{C}]$$

حيث ν مقدار ثابت يمكن إثبات أنه يساوى الوحدة وذلك باختيار (مثلاً) $\underline{A} = \underline{i}$

$$\underline{B} = \underline{i}, \underline{C} = \underline{j}$$

$$\therefore \underline{A} \wedge (\underline{B} \wedge \underline{C}) = (\underline{A} \cdot \underline{C})\underline{B} - (\underline{A} \cdot \underline{B})\underline{C} \quad (25-1)$$

بالمثل يمكن إثبات أن

$$(\underline{A} \wedge \underline{B}) \wedge \underline{C} = (\underline{A} \cdot \underline{C})\underline{B} - (\underline{B} \cdot \underline{C})\underline{A} \quad (25-1)'$$

مثال (١٢):

أثبت أن

$$\underline{A} \wedge (\underline{B} \wedge \underline{C}) + \underline{B} \wedge (\underline{C} \wedge \underline{A}) + \underline{C} \wedge (\underline{A} \wedge \underline{B}) = \underline{0}$$

الحل:

$$L.H.S = (\underline{A} \cdot \underline{C})\underline{B} - (\underline{A} \cdot \underline{B})\underline{C} + (\underline{B} \cdot \underline{A})\underline{C} - (\underline{B} \cdot \underline{C})\underline{A} +$$

$$(\underline{C} \cdot \underline{B})\underline{A} - (\underline{C} \cdot \underline{A})\underline{B} = 0 = R.H.S$$

مثال (١٣): إذا كانت المتجهات $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ تقع في مستوى واحد أثبت أن

$$(\underline{a} \wedge \underline{b}) \wedge (\underline{c} \wedge \underline{d}) = \underline{0}$$

الحل: بفرض أن $\underline{E} = (\underline{a} \wedge \underline{b})$ يكون

$$\begin{aligned}
L.H.S &= (\underline{a} \wedge \underline{b}) \wedge (\underline{c} \wedge \underline{d}) = \underline{E} \wedge (\underline{c} \wedge \underline{d}) \\
&= (\underline{E} \cdot \underline{d}) \underline{c} - (\underline{E} \cdot \underline{c}) \underline{d} \\
&= [(\underline{a} \wedge \underline{b}) \cdot \underline{d}] \underline{c} - [(\underline{a} \wedge \underline{b}) \cdot \underline{c}] \underline{d} \\
&= [0] \underline{c} - [0] \underline{d} = 0 = R.H.S
\end{aligned}$$

وذلك لأن حاصل الضرب الثلاثي القياسي لثلاث متجهات في مستوى ينعدم.

٣-٣- حل المعادلات الاتجاهية :

نعنى بالمعادلة الاتجاهية بالمعادلة التي يكون المجهول بها عبارة عن متجه. باستخدام عمليات الضرب الاتجاهي وخواصها يمكن حل المعادلات الاتجاهية.

مثال (١٤) :

أوجد المتجه $\vec{x}$ الذي يحقق المعادلات

$$\vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{a} \wedge \vec{b}, \quad \vec{a} \cdot \vec{x} = b, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

الحل :

بضرب المعادلة $\vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ اتجاهيا من اليسار في $\vec{a}$ نحصل على

$$\vec{a} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{x}) = \vec{a} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b})$$

$$\therefore (\vec{a} \cdot \vec{x}) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{a}) \vec{x} = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{a}) \vec{b}$$

وباستخدام المعطيات نحصل على

$$b\vec{a} - a^2\vec{x} = -a^2\vec{b} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \frac{b}{a^2}\vec{a} + \vec{b}$$

مثال (١٥) : إذا كان $\vec{b} - \vec{x} = \lambda \vec{a}$ ، $\vec{x} \cdot \vec{a} = 0$ اثبت أن

$$\lambda = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a^2}, \quad \vec{x} = \frac{(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{a}}{a^2}$$

الحل:

بضرب المعادلة $\vec{b} - \vec{x} = \lambda \vec{a}$ قياسياً في $\vec{a}$ نحصل على:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{x} = \lambda \vec{a} \cdot \vec{a}$$

$$\lambda = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a^2} \quad \text{وحيث أن } \vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 \text{ و } \vec{a} \cdot \vec{x} = 0 \text{ (معطى) نحصل على}$$

للحصول على المطلوب الثانى:

$$\therefore \vec{b} - \vec{x} = \lambda \vec{a} \Rightarrow \vec{x} = \vec{b} - \lambda \vec{a} = \vec{b} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a^2} \vec{a}$$

$$\therefore \vec{x} = \frac{1}{a^2} [(\vec{a} \cdot \vec{a}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{a}]$$

$$= \frac{1}{a^2} \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{a}) = \frac{1}{a^2} (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{a}$$

مثال (١٦): أوجد حل المعادلتين:

$$m\underline{x} + \underline{y} \wedge \underline{c} = \underline{a} \quad (1), \quad n\underline{y} + \underline{x} \wedge \underline{c} = \underline{b} \quad (2)$$

الحل:

أولاً: بحذف $\underline{y}$ من المعادلتين وذلك بضرب (1) فى n ، (2) فى c اتجاهياً

من اليسار والجمع

$$nm\underline{x} + n\underline{y} \wedge \underline{c} + n\underline{c} \wedge \underline{y} + \underline{c} \wedge (\underline{x} \wedge \underline{c}) = n\underline{a} + \underline{c} \wedge \underline{b}$$

$$nm\underline{x} + (\underline{c} \cdot \underline{c})\underline{x} - (\underline{x} \cdot \underline{c})\underline{c} = n\underline{a} + \underline{c} \wedge \underline{b}$$

$$(nm + c^2)\underline{x} = (\underline{x} \cdot \underline{c})\underline{c} + n\underline{a} + \underline{c} \wedge \underline{b} \quad (3)$$

يكون $\underline{c}$ قياسيا في (1) بضرب طرفي $(\underline{x} \cdot \underline{c})$ ولإيجاد

$$m(\underline{x} \cdot \underline{c}) + (\underline{y} \wedge \underline{c}) \cdot \underline{c} = \underline{a} \cdot \underline{c}$$

$$\Rightarrow \underline{x} \cdot \underline{c} = \frac{\underline{a} \cdot \underline{c}}{m} \quad (4)$$

بالتعويض من (4) في (3):

$$\therefore \underline{x} = \frac{(\underline{a} \cdot \underline{c})\underline{c} + mn\underline{a} + m(\underline{c} \wedge \underline{b})}{m(nm + c^2)}$$

ثانيا: بحذف $\underline{x}$ من المعادلتين وذلك بضرب (1) في $\underline{c}$ اتجاهيا من اليسار وضرب

(2) في m والجمع يكون

$$m\underline{c} \wedge \underline{x} + \underline{c} \wedge (\underline{y} \wedge \underline{c}) + mn\underline{y} + m(\underline{x} \wedge \underline{c}) = \underline{c} \wedge \underline{a} + m\underline{b}$$

$$\therefore (\underline{c} \cdot \underline{c})\underline{y} - (\underline{c} \cdot \underline{y})\underline{c} + mn\underline{y} = \underline{c} \wedge \underline{a} + m\underline{b}$$

$$\Rightarrow (mm + c^2)\underline{y} = (\underline{c} \cdot \underline{y})\underline{c} + m\underline{b} + \underline{c} \wedge \underline{a} \quad (5)$$

وبضرب طرفي (2) قياسيا في $\underline{c}$ نحصل على:

$$n(\underline{c} \cdot \underline{y}) = \underline{c} \cdot \underline{b} \quad (6)$$

وبالتعويض من (6) في (5) نحصل على

$$\underline{y} = \frac{(\underline{c} \cdot \underline{b})\underline{c} + nmb + n(\underline{c} \wedge \underline{a})}{n(nm + c^2)}$$

أمثلة محلولة على الباب الأول

١- إذا كانت $A(1,0,1)$, $B(2,3,4)$, $C(-1,1,-2)$ ثلاث نقط ، أوجد مسقط $\overline{BA}$

على المتجه $\overline{BC}$ ومن ثم أوجد أقصر مسافة من النقطة A إلى المستقيم BC .

الحل :

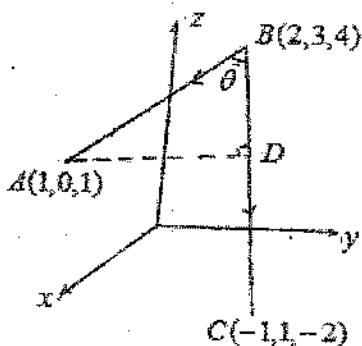
من الشكل المقابل نجد أن

$$\begin{aligned}\overline{BA} &= \underline{r}_A - \underline{r}_B \\ &= (\underline{i} + \underline{k}) - (2\underline{i} + 3\underline{j} + 4\underline{k}) \\ &= -\underline{i} - 3\underline{j} - 3\underline{k}\end{aligned}$$

وبالمثل فإن

$$\overline{BC} = -3\underline{i} - 2\underline{j} - 6\underline{k}$$

مسقط $\overline{BA}$ على $\overline{BC}$ يساوى BD حيث



$$BD = |\overline{BA}| \cos \theta = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}{|\overline{BC}|} = \frac{27}{7}$$

أما أقصر مسافة من النقطة A إلى المستقيم BC فهي AD حيث:

$$(AD)^2 = (AB)^2 - (BD)^2 = 19 - \left(\frac{27}{7}\right)^2 \Rightarrow AD = \frac{\sqrt{202}}{7}$$

٢- أثبت أن المتجهات $\vec{A} = (1,1,1)$, $\vec{B} = (1,0,-1)$, $\vec{C} = (1,-2,1)$ متعامدة.

الحل :

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k} = -\vec{C}$$

وبالتالي يكون $\vec{C}$ عمودي على كل من $\vec{A}$ ، $\vec{B}$

$$\vec{B} \wedge \vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -2\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k} = -2\vec{A}$$

ومنه نستنتج أن $\vec{A}$ عمودي على كل من $\vec{B}$ ، $\vec{C}$.

$$\vec{C} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3\hat{i} + 3\hat{k} = -3\vec{B}$$

وكذلك يكون $\vec{B}$ عمودي على كلا من $\vec{A}$ ، $\vec{C}$.

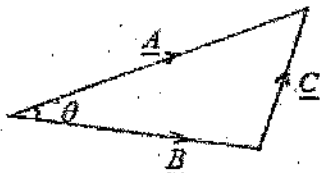
٣- مثلث اطوال أضلاعه A, B, C و θ هي الزاوية المقابلة للضلع C . باستخدام

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta$$

خواص المتجهات اثبت أن

الحل :

من الشكل النمقابل نجد أن:



$$\underline{C} = \underline{A} - \underline{B}$$

$$\therefore C^2 = \underline{C} \cdot \underline{C} = (\underline{A} - \underline{B}) \cdot (\underline{A} - \underline{B})$$

$$= -\underline{A} \cdot \underline{B} - \underline{B} \cdot \underline{A}$$

$$\therefore C^2 = A^2 + B^2 - 2\underline{A} \cdot \underline{B}$$

$$\Rightarrow C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta$$

٤- باستخدام الضرب النثائي للمتجهات أثبت أن

$$\cos(\theta_2 \pm \theta_1) = \cos \theta_2 \cos \theta_1 \mp \sin \theta_2 \sin \theta_1$$

الحل :

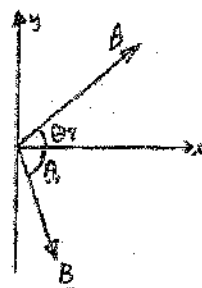
لإثبات العلاقات التي تحتوى على المجموع $(\theta_2 + \theta_1)$ نختار المتجهين $\underline{A}$ ، $\underline{B}$ كما بالشكل المقابل فى المستوى xy بحيث تكون الزاوية بينهما $(\theta_2 + \theta_1)$. بتحليل

المتجهان نج أن

$$\underline{A} = A \cos \theta_2 \underline{\hat{i}} + A \sin \theta_2 \underline{\hat{j}} \quad (i)$$

$$\underline{B} = B \cos \theta_1 \underline{\hat{i}} - B \sin \theta_1 \underline{\hat{j}} \quad (ii)$$

$$\therefore \underline{A} \cdot \underline{B} = AB \cos(\theta_2 + \theta_1), \quad (iii)$$



$$\underline{A} \cdot \underline{B} = AB \cos \theta_2 \cos \theta_1 - AB \sin \theta_2 \sin \theta_1 \quad (iv)$$

من (iii), (iv) نحصل على

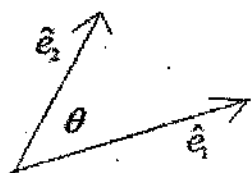
$$AB \cos(\theta_2 + \theta_1) = AB \cos \theta_2 \cos \theta_1 - AB \sin \theta_2 \sin \theta_1$$

$$\Rightarrow \cos(\theta_2 + \theta_1) = \cos \theta_2 \cos \theta_1 - \sin \theta_2 \sin \theta_1$$

٥- إذا كانت الزاوية المحصورة بين المتجهين $\underline{\hat{e}}_1$ ، $\underline{\hat{e}}_2$ هى θ . أثبت أن

$$\sin(\theta/2) = |\underline{\hat{e}}_1 - \underline{\hat{e}}_2|/2$$

الحل :



$$\begin{aligned} (\hat{e}_1 - \hat{e}_2)^2 &= (\hat{e}_1 - \hat{e}_2) \cdot (\hat{e}_1 - \hat{e}_2) \\ &= \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1 - \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 - \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_1 + \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_2 \\ \therefore \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1 &= \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_2 = 1, \quad \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore |\hat{e}_1 - \hat{e}_2|^2 &= 2(1 - \cos \theta) = \sin^2(\theta/2) \\ \Rightarrow \sin(\theta/2) &= |\hat{e}_1 - \hat{e}_2|/2 \end{aligned}$$

٧- اثبت أن :

$$(\underline{b} \wedge \underline{c}) \wedge (\underline{c} \wedge \underline{a}) = [\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}] \underline{c}$$

ثم استنتج أن :

$$(\underline{a} \wedge \underline{b}) \cdot [(\underline{b} \wedge \underline{c}) \wedge (\underline{c} \wedge \underline{a})] = [\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}]^2$$

الحل :

بفرض أن $\underline{x} = \underline{b} \wedge \underline{c}$ مع ملاحظة أن $\underline{x} \cdot \underline{c} = 0$

$$\begin{aligned} \therefore (\underline{b} \wedge \underline{c}) \wedge (\underline{c} \wedge \underline{a}) &= \underline{x} \wedge (\underline{c} \wedge \underline{a}) \\ &= (\underline{x} \cdot \underline{a}) \underline{c} - (\underline{x} \cdot \underline{c}) \underline{a} = [(\underline{b} \wedge \underline{c}) \cdot \underline{a}] \underline{c} \end{aligned}$$

ولإيجاد المطلوب الثاني: نضرب طرفي المعادلة السابقة قياسياً في $(\underline{a} \wedge \underline{b})$:

$$\begin{aligned} \therefore (\underline{a} \wedge \underline{b}) \cdot (\underline{b} \wedge \underline{c}) \wedge (\underline{c} \wedge \underline{a}) &= [\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}] [(\underline{a} \wedge \underline{b}) \cdot \underline{c}] \\ &= [\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}] [\underline{a} \cdot (\underline{b} \wedge \underline{c})] = [\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}]^2 \end{aligned}$$

٨- إذا كانت $\alpha \neq 0$ فاثبت أن حل المعادلة $\alpha \vec{x} + \vec{A} \wedge \vec{x} = \vec{B}$ هو

$$\vec{x} = \frac{\alpha^2 \vec{B} + (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{A} + \alpha (\vec{B} \wedge \vec{A})}{\alpha(\alpha^2 + A^2)}$$

الحل :

$$\therefore \alpha \bar{x} + \bar{A} \wedge \bar{x} = \bar{B} \quad (1)$$

نحصل على $\bar{A}$ قياسيا في (1) ضرب طرفي

$$\alpha(\bar{x} \cdot \bar{A}) + (\bar{A} \wedge \bar{x}) \cdot \bar{A} = \bar{B} \cdot \bar{A}$$

$$\therefore \alpha(\bar{x} \cdot \bar{A}) = \bar{B} \cdot \bar{A} \quad (2)$$

بضرب طرفي (1) من اليمين إتجاهيا في $\bar{A}$:

$$\alpha(\bar{x} \wedge \bar{A}) + (\bar{A} \wedge \bar{x}) \wedge \bar{A} = \bar{B} \wedge \bar{A}$$

$$\Rightarrow \alpha(\bar{x} \wedge \bar{A}) + A^2 \bar{x} - (\bar{x} \cdot \bar{A}) \bar{A} = \bar{B} \wedge \bar{A} \quad (3)$$

ولكن من (1) نجد أن

$$\bar{x} \wedge \bar{A} = \alpha \bar{x} - \bar{B}$$

ومن (2) نحصل على

$$\bar{x} \cdot \bar{A} = \frac{\bar{B} \cdot \bar{A}}{\alpha}$$

وبالتعويض في (3) عن قيمة كل من $\bar{x} \wedge \bar{A}$ ، $\bar{x} \cdot \bar{A}$ نحصل على

$$\alpha(\alpha \bar{x} - \bar{B}) + A^2 \bar{x} - \frac{\bar{A} \cdot \bar{B}}{\alpha} \bar{A} = \bar{B} \wedge \bar{A}$$

$$\therefore (\alpha^2 + A^2) \bar{x} - \alpha \bar{B} - \frac{\bar{A} \cdot \bar{B}}{\alpha} \bar{A} = \bar{B} \wedge \bar{A}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{\alpha^2 \bar{B} + (\bar{A} \cdot \bar{B}) \bar{A} + \alpha(\bar{B} \wedge \bar{A})}{\alpha(\alpha^2 + A^2)}$$

تمارين

١- إذا كان

$$\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k}, \quad \vec{B} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{C} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}, \quad \vec{D} = 3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}$$

فأوجد:

أ- طول كل من هذه المتجهات ووحدة المتجهات في اتجاه كل منها.

ب- $\vec{A} \cdot \vec{B}$ ، $\vec{A} \cdot \vec{C}$ ، $\vec{A} \cdot \vec{D}$ ، $\vec{C} \cdot \vec{D}$.

ج- الزاوية بين $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ ثم بين $\vec{C}$ ، $\vec{D}$.

د- $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C} - \vec{D})$ وقارنها مع $\vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C} - \vec{A} \cdot \vec{D}$

ذ- $(\vec{A} + \vec{B}) \wedge (\vec{C} + \vec{D})$ ، $(\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{C} + \vec{D})$

ر- $\vec{A} \wedge (\vec{B} + \vec{C} + \vec{D})$ ، $\vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \vec{C} + \vec{A} \wedge \vec{D}$ وقارن بينهما.

ز- حجم متوازي السطوح المكون من المتجهات $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$.

س- أوجد مسقط المتجه $\vec{A}$ في اتجاه المتجه $\vec{D}$

٢- إذا كان $\vec{a} = 2\hat{i} + \alpha\hat{j}$ ، $\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j}$ فأوجد قيمة α في الحالات الآتية:

أ- إذا كان المتجهان متعامدان. ب- إذا كان المتجهان متوازيان.

ج- إذا كانت الزاوية بين المتجهان تساوى $\frac{\pi}{3}$.

د- إذا كانت $\alpha = -4$ فأوجد جيب تمام الزاوية بينهما.

٣- أوجد الزاوية التي يصنعها المتجه $\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}$ مع محاور الإحداثيات.

٤- اثبت أن المتجهين $\vec{d} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - 5\hat{k}$ ، $\vec{c} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ متعامدان وأن الزاوية

بين المتجهين $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ ، $\vec{b} = \hat{i} + \hat{k}$ هي $\pi/4$.

٥- أوجد مسقط المتجه $\vec{a} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ في اتجاه المتجه $\vec{b} = \hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$

٦- أوجد متجه وحدة عمودى على كل من المتجهين $\vec{a} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ و

$$\vec{b} = \hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$$

٧- باستخدام المتجهات أوجد زوايا المثلث abc حيث $a(0,0,0)$ ، $b(1,2,1)$ ، $c(-1,0,1)$

$$c(-1,0,1)$$

٨- أثبت أن

$$i) - [\underline{a} \wedge (\underline{b} \wedge \underline{c})] \wedge \underline{c} = (\underline{a} \cdot \underline{c})(\underline{b} \wedge \underline{c})$$

$$ii) - (\underline{a} \wedge \underline{b}) \cdot (\underline{c} \wedge \underline{d}) = [\underline{a}, \underline{b}, \underline{d}]\underline{c} - [\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}]\underline{d}$$

٩- أوجد متجهى الموضع للنقطتين $(1,1,1)$ ، $(2,-2,1)$ ثم اكتب كل منهما على

$$\text{الصورة } \vec{a} = a\hat{e}$$

١٠- أوجد المتجه $\vec{x}$ الذى يحقق كل من المعادلتين $\vec{a} \cdot \vec{x} = c$ ، $\vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b}$ واثبت أنه

$$\vec{x} = \frac{c}{a^2} \vec{a} + \frac{\vec{b} \wedge \vec{a}}{a^2}$$

١١- أوجد حل المعادلات الاتجاهية الآتية:

$$a) (\vec{a} \cdot \vec{x}) \vec{x} = \vec{a}, \vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{c}$$

$$b) n\vec{x} + \vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{0}, \quad \vec{a} \cdot \vec{x} = m$$

$$c) \vec{x} + \vec{y} = \vec{c}, \quad \vec{a} \wedge \vec{x} + \vec{b} \wedge \vec{y} = \vec{0}, \quad \vec{a} \cdot \vec{x} = 0$$

١٢- إذا تم تعريف المتجهات $\vec{a}^*$, $\vec{b}^*$, $\vec{c}^*$ بدلالة المتجهات $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ بالعلاقات:

$$\vec{a}^* = \frac{\vec{b} \wedge \vec{c}}{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]}, \quad \vec{b}^* = \frac{\vec{c} \wedge \vec{a}}{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]}, \quad \vec{c}^* = \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]}$$

$$[\vec{a}^*, \vec{b}^*, \vec{c}^*] = \frac{1}{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]} \quad \text{أثبت أن}$$

ب. أثبت أن إذا كانت $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ مجموعة محاور يمينية فإن $\vec{a}^*$, $\vec{b}^*$, $\vec{c}^*$ مجموعة محاور يمينية.

ج. إذا تم تعريف المتجه $\vec{v}$ بدلالة المتجهات $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ بالعلاقة

$$\vec{v} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \gamma \vec{c}$$

$$\lambda = \vec{v} \cdot \vec{a}^*, \quad \mu = \vec{v} \cdot \vec{b}^*, \quad \gamma = \vec{v} \cdot \vec{c}^* \quad \text{أثبت أن}$$

١٣- باستخدام الضرب الثنائي للمتجهات أثبت أن

$$\sin(\theta_2 \pm \theta_1) = \sin \theta_2 \cos \theta_1 \pm \cos \theta_2 \sin \theta_1$$

يعرف المتجه المحصل لعزوم N من القوى بالمتجه

$$\underline{G}_A = \underline{G}_1 + \underline{G}_2 + \underline{G}_3 + \dots + \underline{G}_N = \sum_i^N \underline{G}_i \quad (10-2)$$

بأنه متجه العزم المحصل حول A لمجموعة القوى المؤثرة على الجسم الجاسئ وهو يقيس مقدرة هذه المجموعة على إدارة الجسم حول A .
وإذا انعدم هذا المتجه المحصل انعدم التأثير الدوراني لهذه القوى المتجمعة حول نقطة العزم A .

مثال (٢) :

أوجد عزم القوة $\underline{F} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ والتي تمر بالنقطة $(0, 1, -1)$ حول محور المستقيم المار بالنقطتين $(-1, 1, 2)$ ، $(-2, -1, 4)$.

الحل :

متجه الوحدة للمستقيم الواصل بين النقطتين $(-1, 1, 2)$ ، $(-2, -1, 4)$ هو

$$\underline{\hat{e}} = \frac{(-1+2)\hat{i} + (1+1)\hat{j} + (2-4)\hat{k}}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{1}{3}(\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})$$

وعزم القوة $\underline{F}$ حول هذا المستقيم هو

$$G_e = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & -5 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(12 - 2 - 8) = \frac{2}{3}$$

وذلك باختيار النقطة $(-1, 1, 2)$ على المحور وعلى الطالب تكرار الحل باستخدام النقطة

$(-2, -1, 4)$.

مثال (٣) :

أثرت القوتين $F_1 = 5$ ، $F_2 = 10$ فى الاتجاهين $\overline{CB'}$ ، $\overline{A'C'}$ على الترتيب من متوازى المستطيلات $ABCD A'B'C'D'$ حيث $BC = 3$ ، $BB' = 4$ ، $AB = 4$.
أوجد

i - عزم القوة F_1 حول نقطة الأصل A وعزم القوة F_2 حول D .

ii - قيمة العزم المحصل حول A .

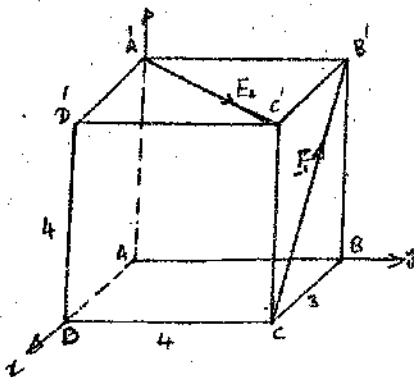
iii - العزم المحصل حول المحور $\overline{AC'}$.

الحل :

i - بالنسبة للقوة F_1 : متجه الوحدة لها $\hat{e}_1$ يوازى $\overline{CB'}$ وعليه فإن

$$\therefore \hat{e}_1 = \frac{\overline{CB'}}{|\overline{CB'}|}$$

$$\therefore B'(0,4,4) \text{ \& } C(3,4,0) \Rightarrow \overline{CB'} = -3\hat{i} + 4\hat{k}$$



$$\therefore \hat{e}_1 = \frac{\overline{CB'}}{|\overline{CB'}|} = \frac{1}{5}(-3\hat{i} + 4\hat{k})$$

$$\Rightarrow \underline{F}_1 = F_1 \hat{e}_1 = -3\hat{i} + 4\hat{k}$$

بالنسبة للقوة F_2 : متجه الوحدة لها

$$\hat{e}_2 = \frac{\overline{A'C'}}{|\overline{A'C'}|}$$

$$A'(0,0,4) \text{ \& } C'(3,4,4)$$

$$\therefore \overline{A'C'} = 3\hat{i} + 4\hat{j}, \quad |\overline{A'C'}| = 5 \Rightarrow \underline{e}_2 = \frac{1}{5}(3\hat{i} + 4\hat{j}),$$

$$\therefore \underline{F}_2 = F_2 \underline{e}_2 = 6\hat{i} + 8\hat{j}$$

عزم القوة $\underline{F}_1$ حول A :

$$\underline{G}_A = \overline{AC} \wedge \underline{F}_1 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 16\hat{i} - 12\hat{j} + 12\hat{k} \quad (1)$$

وعزم القوة $\underline{F}_2$ حول D :

$$\underline{F}_2 = 10\underline{e}_2 = 6\hat{i} + 8\hat{j}, \quad \overline{DA'} = -3\hat{i} + 4\hat{k}$$

$$\therefore \underline{G}_D = \overline{DA'} \wedge \underline{F}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 0 & 4 \\ 6 & 8 & 0 \end{vmatrix} = -32\hat{i} + 24\hat{j} - 24\hat{k} \quad (2)$$

ii - عزم القوة $\underline{F}_2$ حول A :

$$\underline{G}_2 = \overline{AA'} \wedge \underline{F}_2 = 4\hat{k} \wedge (6\hat{i} + 8\hat{j}) = -32\hat{i} + 24\hat{j} \quad (3)$$

من (1), (3) نحصل على العزم المحصل حول A :

$$\underline{G} = \underline{G}_A + \underline{G}_2$$

$$\therefore \underline{G} = -16\hat{i} + 12\hat{j} + 12\hat{k} = 4(-4\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}) \quad (4)$$

وهو المطلوب ثانياً.

iii - لإيجاد العزم المحصل حول المحور $\overline{AC'}$

$$\therefore \overline{AC'} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k} \Rightarrow |\overline{AC'}| = \sqrt{9+16+16} = \sqrt{41}$$

ومنها متجه الوحدة لهذا المحور $\hat{e}$ يكون

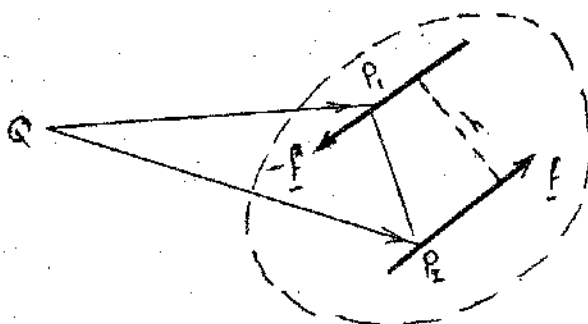
$$\hat{e} = \frac{\overline{AC'}}{|\overline{AC'}|} = \frac{1}{\sqrt{41}}(3\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k}) \quad (5)$$

والعزم حول المحور G_e : باستخدام (4), (5)

$$G_e = \hat{e} \cdot \underline{G} = \frac{4}{\sqrt{41}}(-12+12+12) = \frac{48}{\sqrt{41}}$$

(٣-٢) الازدواج (Couple):

يتكون الازدواج من قوتين متساويتين في المقدار ومتضادتين في الإتجاه مثل $\underline{f}, -\underline{f}$ ولكن خطى عملهما ليسا على إستقامة واحدة. ويعرف مقدار عزم الازدواج على أنه حاصل ضرب مقياس أى من القوتين f فى المسافة العمودية h بين خطى عملهما.



وفى الحقيقة مجموع عزوم القوتين المكونين لهذا الازدواج حول أية نقطة Q واقعة فى مستوى القوتين يكون متجها ثابتا $\underline{M}$ والذى لا يعتمد على اختيار النقطة Q كما يتضح من البرهان الآتى :

$$\underline{M} = \overline{QP_2} \wedge \underline{f} + \overline{QP_1} \wedge (-\underline{f})$$

$$= -\overline{QP_1} \wedge \underline{f} + (\overline{QP_1} + \overline{P_1P_2}) \wedge \underline{f}$$

$$= \overline{P_1P_2} \wedge \underline{f} = \overline{P_2P_1} \wedge (-\underline{f}) \quad (11-2)$$

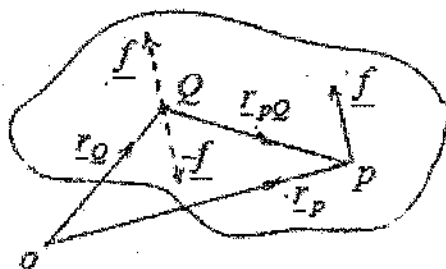
وعلى ذلك فإن عزم الازدواج $\underline{M}$ هو عزم احدى قوتيّه حول أى نقطة على خط عمل القوة الأخرى. وعلى ذلك يلاحظ أن عزم الازدواج متجه ذاتى يكفى لتحديد مقياسه واتجاهه فقط ويمكن وضعه عند أى نقطة.

واضح أيضا أن متجه الازدواج $\underline{M}$ عمودى على مستوى قوتي الازدواج ويعمل فى اتجاه حركة البريمة الموجبة التى تدور مع الازدواج.

ثانياً: إختزال مجموعة من القوى المؤثرة على جسم جاسئ عند نقطة ما إلى قوة

وازدواج:

سوف ندرس أولاً نقل نقطة تأثير قوة وحيدة $\underline{f}$ تؤثر عند النقطة P فى الجسم الجاسئ إلى نقطة أخرى Q . وذلك بإضافة القوتين $\underline{f}$ ، $-\underline{f}$ عند النقطة Q فإن ذلك لا يحدث تغيراً فى حالة الجسم من ناحية الحركة وذلك لأن القوتين $\underline{f}$ ، $-\underline{f}$ عند النقطة Q متزنتين معاً.



وبذلك يمكن القول أن مجموع القوى ($\underline{f}$ عند P والقوتين $\underline{f}$ ، $-\underline{f}$ عند Q) تكافئ

استاتيكية القوة الوحيدة $\underline{f}$ عند P وحيث أن القوتان $\underline{f}$ عند P ، $\underline{f}$ - عند Q تكونان
ازدواجاً عزمه $\underline{M}$ حيث

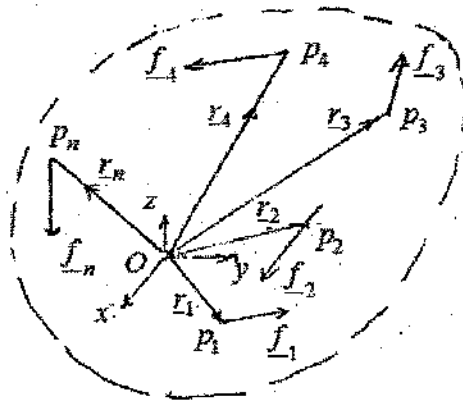
$$\underline{M}_Q = \underline{r}_{PQ} \wedge \underline{f} \quad \text{حيث } \underline{M}$$

$$\therefore \underline{M}_Q = (\underline{r}_Q - \underline{r}_P) \wedge \underline{f} \quad (12-2)$$

وبهذا يمكن القول بأن القوة $\underline{f}$ عند P تكافئ استاتيكيةً عند Q قوة مساوية لها تماماً
بالإضافة إلى ازدواج عزمه $\underline{M}$ ويقدر بعزم القوة $\underline{f}$ عند P حول النقطة Q . وبهذا
نستطيع صياغة مبدأ نقل خط عمل القوة على النحو التالي:-

إن أى قوة $\underline{f}$ تؤثر عند النقطة P يمكن أن تستبدل بقوة مساوية لها تماماً تؤثر في نقطة
أخرى جديدة Q بالإضافة إلى ازدواج عزمه يساوى عزم القوة المشار إليها في وضعها
القديم حول نقطة التأثير الجديد Q .

والآن سوف نحاول إختزال مجموعة من القوى المؤثرة على الجسم عند نقطة الأصل.



نفرض أن مجموعة القوى هي $\underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3, \dots, \underline{f}_n$ تؤثر في النقط $P_1, P_2, P_3, \dots$

P_n على الترتيب حيث $\underline{r}_1, \underline{r}_2, \underline{r}_3, \dots, \underline{r}_n$ هي متجهات الموضع لتلك النقط كما

بالشكل. وينقل كل قوة إلى نقطة الأصل O باستخدام المبدأ السابق فإن القوة $\underline{f}_1$ عند P_1

تكافئ قوة $\underline{f}_1$ عند O . بالإضافة إلى ازدواج عزمه $\underline{M}_1 = \underline{r}_1 \wedge \underline{f}_1$ وبالمثل $\underline{f}_2$

عند P_2 تكافئ قوة $\underline{f}_2$ عند O وازدواج $\underline{M}_2 = \underline{r}_2 \wedge \underline{f}_2$ والقوة $\underline{f}_3$ تكافئ $\underline{f}_3$

عند O وازدواج $\underline{M}_3 = \underline{r}_3 \wedge \underline{f}_3$ ، وهكذا حتى نصل إلى القوة الأخيرة $\underline{f}_n$ عند

P_n تكافئ قوة $\underline{f}_n$ عند O وازدواج عزمه $\underline{M}_n = \underline{r}_n \wedge \underline{f}_n$.

ومن ثم فإن هذه المجموعة من القوى تؤول إلى مجموعة من القوى $\underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3, \dots, \underline{f}_n$

تؤثر جميعها في النقطة O وهذه يمكن تحصيلها إلى قوة وحيدة $\underline{F}$ حيث

$$\underline{F} = \underline{f}_1 + \underline{f}_2 + \underline{f}_3 + \dots + \underline{f}_n = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k} \quad (13-2)$$

بالإضافة إلى مجموعة الإزدواجات $\underline{M}_1, \underline{M}_2, \dots, \underline{M}_n$ يتم تحصيلها إلى إزدواج

وحيد عزمه $\underline{M}$ حيث

$$\underline{M} = \underline{M}_1 + \underline{M}_2 + \underline{M}_3 + \dots + \underline{M}_n$$

$$= \underline{r}_1 \wedge \underline{f}_1 + \underline{r}_2 \wedge \underline{f}_2 + \underline{r}_3 \wedge \underline{f}_3 + \dots + \underline{r}_n \wedge \underline{f}_n$$

$$= \sum_{i=1}^n \underline{r}_i \wedge \underline{f}_i = M_x \hat{i} + M_y \hat{j} + M_z \hat{k} \quad (14-2)$$

حيث F_x مجموع مركبات القوى في اتجاه المحور ox ، F_y مجموع مركبات القوى

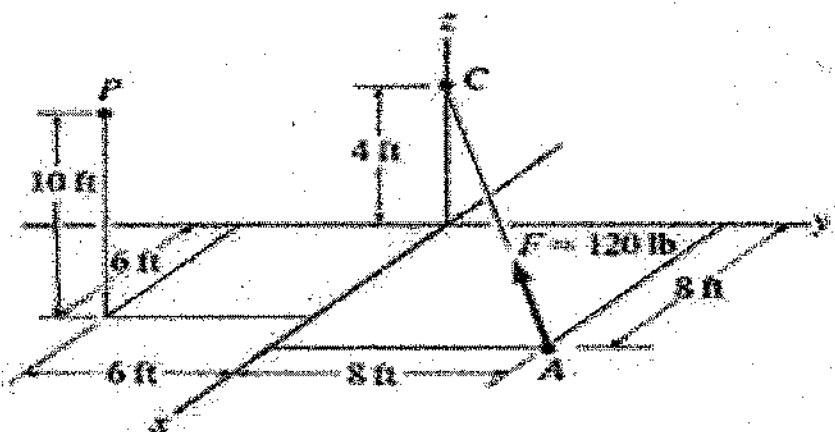
في اتجاه المحور oy ، F_z مجموع مركبات القوى في اتجاه المحور oz ، M_x

مجموع عزوم القوى حول المحور ox ، M_y مجموع عزوم القوى حول المحور oy

، و M_z مجموع عزوم القوى حول المحور oz .

مثال (٤) :

أختزل القوة المبينة بالرسم المقابل إلى قوة وازدواج عند النقطة p .



الحل :

من الرسم نجد أن القوة $\vec{F}$ تعمل في اتجاه $\overline{AC}$ حيث $A(8,8,0)$, $C(0,0,4)$

$$\therefore \vec{F} = F \frac{\overline{AC}}{|\overline{AC}|} = 120 \frac{-8\hat{i} - 8\hat{j} + 4\hat{k}}{12} = -80\hat{i} - 80\hat{j} + 40\hat{k}$$

تختزل القوة $\vec{F}$ عند النقطة $p(6, -6, 10)$ إلى القوة نفسها وازدواج عزمه يساوي

$$\underline{M}_p = \overline{PA} \wedge \vec{F}, \quad \overline{PA} = 2\hat{i} + 14\hat{j} - 10\hat{k}$$

$$\therefore \underline{M}_p = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 14 & -10 \\ -80 & -80 & 40 \end{vmatrix} = -240\hat{i} + 720\hat{j} + 960\hat{k}$$

ومقداره $M_p = 1223.76 \text{ lb} \cdot \text{ft}$

مثال (٥) :

قوتان $\underline{f}_1 = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ تؤثر في النقطة $P_1(2, -2, 1)$ و $\underline{f}_2 = 2\hat{i} - 3\hat{k}$

تؤثر في النقطة $P_2(2, 2, 3)$. اختزل المجموعة إلى قوة وازدواج عند النقطة $P(1, 1, 1)$.

الحل:

$$\begin{aligned}\underline{F} &= \underline{f}_1 + \underline{f}_2 = (2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) + (2\hat{i} - 3\hat{k}) \\ &= 4\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}\end{aligned}\quad (1)$$

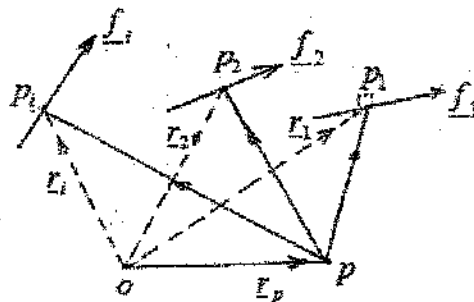
$$\overline{PP_1} = \hat{i} - 3\hat{j}, \quad \overline{PP_2} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\underline{M}_P = \overline{PP_1} \wedge \underline{f}_1 + \overline{PP_2} \wedge \underline{f}_2$$

$$\begin{aligned}\underline{M}_P &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} \\ &= (3\hat{i} + \hat{j} + 8\hat{k}) + (-3\hat{i} + 7\hat{j} - 2\hat{k}) = 8\hat{j} + 6\hat{k}\end{aligned}\quad (2)$$

ملحوظة :

لبرهان العلاقة (2-14). نفرض أنه المطلوب اختزال المجموع $\underline{f}_1, \underline{f}_2$



$\underline{f}_3, \dots, \underline{f}_N$ والتي تؤثر عند القوة $P_1, P_2, P_3, \dots, P_N$ على الترتيب:

وأن متجهات الموضع لها هي $\underline{r}_1, \underline{r}_2, \underline{r}_3, \dots, \underline{r}_N$ على الترتيب عند أى نقطة

P . واضح ان مجموعة القوى تكافئ القوة

$$\underline{F} = \underline{f}_1 + \underline{f}_2 + \underline{f}_3 + \dots + \underline{f}_n = \sum_{i=1}^n \underline{f}_i$$

بالإضافة إلى ازدواج عزمه $\underline{M}_P$ حيث

$$\underline{M}_P = \overline{PP_1} \wedge \underline{f}_1 + \overline{PP_2} \wedge \underline{f}_2 + \dots + \overline{PP_n} \wedge \underline{f}_n$$

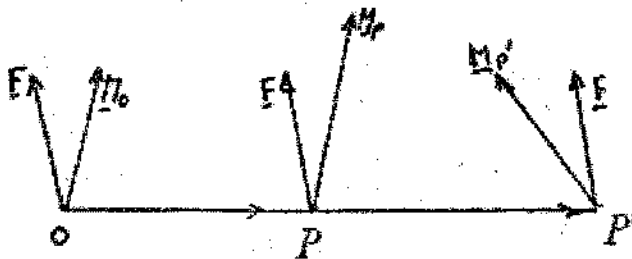
$$= \sum_{i=1}^n \overline{PP_i} \wedge \underline{f}_i = \sum_{i=1}^n (\underline{r}_i - \underline{r}_P) \wedge \underline{f}_i$$

$$= \sum_{i=1}^n \underline{r}_i \wedge \underline{f}_i - \underline{r}_P \wedge \sum_{i=1}^n \underline{f}_i$$

$$\Rightarrow \underline{M}_P = \underline{M} - \underline{r}_P \wedge \underline{F} \quad (15-2)$$

حيث جرت العادة أن يكتب عزم الإزدواج المحصل حول نقطة الأصل بدون لاحقة

(بدون النقطة O) ، أى أن $\underline{M} = \underline{M}_O$.



ويمكن تعميم العلاقة (15-2) وذلك باختيار نقطة أخرى P' كنقطة تأثير للمحصلة $\underline{F}$

فإن الازدواج المصاحب يكون عزمه $\underline{M}_p$ ويعطى من المعادلة

$$\underline{M}_{p'} = \underline{M}_p - \overline{PP'} \wedge \underline{F} \quad (16-2)$$

وهي توازي تماماً المعادلة (2-15)

اللامتغيرات (الثوابت) (Invariants):

نعلم أنه عند نقل مجموعة من القوى من نقطة إلى أخرى فإن المحصلة لا تتغير أى

أن

$$F^2 = \text{const.} \quad (17-2)$$

أما الازدواج المحصل فهو يتغير من نقطة إلى أخرى:

$$\vec{M}_{p'} = \vec{M}_p - \overline{PP'} \wedge \vec{F} = \vec{M} - \overline{OP'} \wedge \vec{F}$$

وبالضرب قياسياً في $\vec{F}$ وباستخدام (2-15) نحصل على

$$\vec{M}_{p'} \cdot \vec{F} = \vec{M}_p \cdot \vec{F} = \vec{M} \cdot \vec{F} = \text{const.} \quad (18-2)$$

نتيجة هامة:

i- إذا كان المتجه $\vec{M}_o$ عمودي على $\vec{F}$ فإن عزم الازدواج عند أى نقطة أخرى

مثل $\vec{M}_p$ ، $\vec{M}_{p'}$ تكون عموديه على المتجه $\vec{F}$ حيث يكون

$$\vec{F} \cdot \vec{M} = 0 = \vec{F} \cdot \vec{M}_p = \vec{F} \cdot \vec{M}_{p'}$$

ii- إذا كان عزم الازدواج عند P يساوى الصفر أى أن $\vec{M}_p = 0$ فإن

$\vec{F} \cdot \vec{M}_p = 0$ و يكون $\vec{F} \cdot \vec{M} = 0$ والمجموعة تكافئ قوة وحيدة $\vec{F}$ عند النقطة P .

iii- أما إذا كان $\vec{F} \cdot \vec{M} \neq 0$ فإنه يمكن تعريف الكمية القياسية اللامتغيرة (الثابتة) P

على الصورة

$$P = \frac{\vec{F} \cdot \vec{M}}{F^2} \quad (19-2)$$

وتسمى P "درجة اللولبية" (Pitch of Wrench) للمجموعة. وتسمى الكميات F^2 , $\vec{F} \cdot \vec{M}$, P باللا متغيرات.

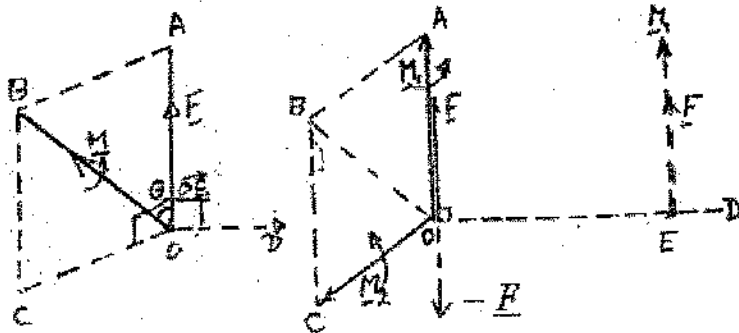
١- اختزال مجموعة من القوى إلى لولبية (Wrench):

تعريف : تعرف اللولبية بالمجموعة المكونة من قوة وازدواج ينطبق محوره على خط عمل القوة.

نظرية : إذا اختزلت مجموعة من القوى إلى لولبية فإن اللولبية تكون وحيدة.

البرهان :

نفرض أن مجموعة القوى $\underline{f}_1, \underline{f}_2, \dots, \underline{f}_n$ كانت محصلتها القوة $\underline{F}$ ومحصلة عزومها حول نقطة الأصل الازدواج $\underline{M}$ كما هو مبين بالشكل.



الخط المستقيم OA ينطبق مع $\underline{F}$ والخط المستقيم OB ينطبق مع $\underline{M}$ ، وإن الخط

OC هو المستقيم الواقع في المستوى OAB ويكون عموديا على OA ، وإن الخط

OD هو المستقيم العمودى على كل من OA ، OC أى أن الخط OD فى اتجاه العمودى على المستوى الذى يحتوى المجموع $\underline{M}$ ، $\underline{F}$ وإذا كانت θ هى الزاوية بين $\underline{M}$ ، $\underline{F}$ فإننا نحلل الازدواج $\underline{M}$ إلى ازدواجين متعامدين أحدهما $\underline{M}_1$ ينطبق محوره مع المستقيم OA والآخر $\underline{M}_2$ ينطبق محوره مع المستقيم OC حيث يمكن كتابتهما على الصورة:

$$\left. \begin{aligned} \underline{M}_1 &= M \cos \theta \underline{\hat{F}} = (\underline{\hat{F}} \cdot \underline{M}) \underline{\hat{F}} \\ &= \frac{\underline{F} \cdot \underline{M}}{F^2} \underline{F} = P \underline{F} \end{aligned} \right\} \quad (20-2),$$

$$\underline{M}_2 = M \sin \theta \underline{\hat{M}_2} = |\underline{M} \wedge \underline{\hat{F}}| \underline{\hat{M}_2} \quad (21-2)$$

حيث $\underline{\hat{F}}$ ، $\underline{\hat{M}_2}$ متجهات الوحدة فى اتجاه كل من $\underline{F}$ ، $\underline{M}$ على الترتيب والآن نستبدل الازدواج $\underline{M}_2$ بالقوتين $\underline{F}$ ، $-\underline{F}$ فى المستوى OAD العمودى على $\underline{M}_2$ بحيث تكون المسافة العمودية بينهما هى OE كما بالرسم

$$\therefore OE = \frac{M_2}{F} = \frac{M \sin \theta}{F} = \frac{|\underline{\hat{F}} \wedge \underline{M}|}{F} = \frac{|\underline{\hat{F}} \wedge \underline{\hat{M}}|}{F^2} \quad (22-2)$$

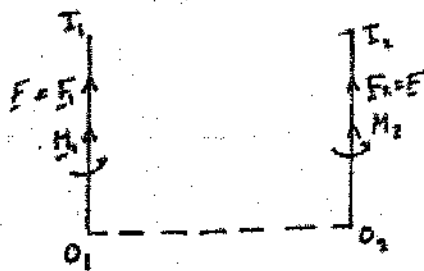
واضح أن القوتان $\underline{F}$ - تعادل القوة $\underline{F}$ عند نفس النقطة O . وبناء على ذلك فإن المجموعة الأصلية $\underline{F}, \underline{M}$ عند O قد اختزلت الآن إلى القوة $\underline{F}$ عند E والازدواج الذى عزمه $\underline{M}_1$ حيث $\underline{M}_1 = P \underline{F}$ (من المعادلة (20-2)).
أى أن محور الازدواج عند $\underline{M}_1$ يكون موازيا لخط عمل القوة $\underline{F}$ والذى يسمى محور اللولبية الناتجة ويسمى أيضا محور بواتسون المركزى للمجموعة. ويبعد هذا المحور عن

مستوى المجموعة الأصلية $\underline{F}, \underline{M}$ أى مستوى OAB المسافة OE حيث E نقطة على محور اللولبية. من المعادلة (22-2):

$$OE = \frac{|\underline{F} \wedge \underline{M}|}{F^2} \Rightarrow \overline{OE} = \frac{\underline{F} \wedge \underline{M}}{F^2} \quad (22-2)'$$

ملحوظة : إذا انعدم الازدواج $\underline{M}_2$ فى حين أن $\underline{M} \neq 0$ فيكون الازدواج $\underline{M}$ موازيا للقوة $\underline{F}$ وتصبح المجموعة $\underline{F}, \underline{M}$ لولبية عند نقطة الأصل.

والآن سوف نثبت أن هذه اللولبية وحيدة وذلك بفرض أنه أمكن اختزال مجموعة القوى المؤثرة على الجسم الجاسئ إلى اللولبية $\underline{F}, \underline{M}$ الذى ينطبق محورها على المستقيم $(O_1 I_1)$ وكذلك نفرض أنه أمكن اختزالها إلى لولبية أخرى $\underline{F}, \underline{M}$ ينطبق محورها على



المستقيم $(O_2 I_2)$ كما بالشكل. وإذا

كانت تلك المجموعة تكافئ $\underline{F}, \underline{M}$ عند نقطة الأصل.

$$\therefore \underline{F} = \underline{F}_1 = \underline{F}_2 = \text{const} = \underline{a},$$

$$\underline{F} \cdot \underline{M} = \underline{F}_1 \cdot \underline{M}_1 = \underline{F}_2 \cdot \underline{M}_2 = \text{const}$$

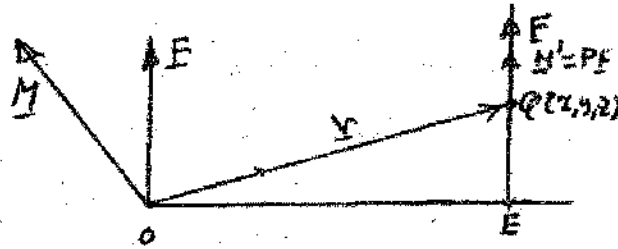
$$\therefore \underline{a} \cdot \underline{M} = \underline{a} \cdot \underline{M}_1 = \underline{a} \cdot \underline{M}_2 = \text{const}$$

$$\Rightarrow \underline{M} = \underline{M}_1 = \underline{M}_2$$

وهذا مستحيل لأنه عند تغير نقطة الاختزال يتغير الازدواج المرافق. إذن لا يمكن اختزال مجموعة واحدة من القوى إلا إلى لولبية وحيدة.

معادلة محور اللولبية (محور يوانسوت المركزي)

بإختزال مجموعة القوى عند نقطة الأصل O إلى $\underline{F}, \underline{M}$. ثم نختار النقطة العامة $Q(x, y, z)$ على محور اللولبية. أى أنه يمكن اعتبار أنه قد تم اختزال مجموعة القوى عند النقطة Q إلى القوة $\underline{F}$ والازدواج $\underline{M}' = \underline{PF}$ كما بالشكل.



وباستخدام العلاقة (2-15)

$$\underline{M}' = \underline{M} - \underline{r} \wedge \underline{F}, \quad \therefore \underline{M}' = \underline{PF}$$

$$\therefore \underline{M} = \underline{PF} + \underline{r} \wedge \underline{F} \quad (2-23)$$

وهي المعادلة الاتجاهية لمحور اللولبية ، حيث $\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$

ومن هذه المعادلة الاتجاهية تنتج ثلاث معادلات قياسية تكون معادلات ثلاث مستويات تتقاطع جميعها فى خط واحد هو محور اللولبية. وفى الحقيقة معادلتين من هذه المعادلات الثلاثة تكفى لإيجاد محور اللولبية حيث أن هذه المعادلات الثلاثة غير مستقلة خطياً. من المعادلة (2-23) نحصل على المعادلات القياسية:

$$\left. \begin{aligned} M_x - PF_x &= yF_z - zF_y \\ M_y - PF_y &= zF_x - xF_z \\ M_z - PF_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \right\} \quad (2-24)$$

ويمكن وضع معادلة محور اللولبية (24-2) على الصورة

$$\frac{x-x_0}{A} = \frac{y-y_0}{B} = \frac{z-z_0}{C} = \lambda$$

حيث (x_0, y_0, z_0) إحداثيات نقطة معلومة E على محور اللولبية ، (A, B, C)

مركبات متجه يوازي محور اللولبية وحيث أن المتجه $\underline{F} = F_x \underline{\hat{i}} + F_y \underline{\hat{j}} + F_z \underline{\hat{k}}$ يوازي محور اللولبية.

إن معادلة محور اللولبية يمكن كتابته على الصورة

$$\left. \begin{aligned} \frac{x-x_0}{F_x} = \frac{y-y_0}{F_y} = \frac{z-z_0}{F_z} = \lambda \\ \underline{r}_0 = x_0 \underline{\hat{i}} + y_0 \underline{\hat{j}} + z_0 \underline{\hat{k}} = \frac{\underline{F} \wedge \underline{M}}{F^2} \end{aligned} \right\} \quad (25-2)$$

حيث $\underline{r}_0$ متجه موضع النقطة E من المعادلة (22-2) '.

ملحوظة : إذا اختزلت المجموعة عند نقطة الأصل إلى $\underline{F}, \underline{M}$ وكان $\underline{F} \wedge \underline{M} = \underline{0}$ أى

متوازيان فإن هذه المجموعة تكافئ لولبية عند نقطة الأصل أى أن

$$P \neq 0, \quad \underline{M} = P \underline{F}$$

وتصبح المعادلة الاتجاهية لمحور اللولبية على الصورة

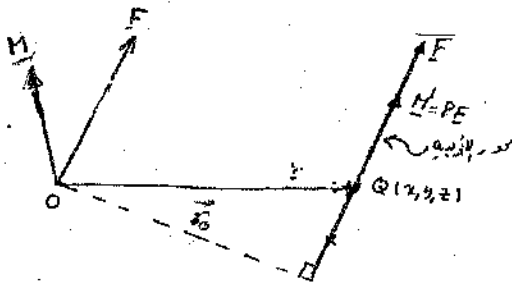
$$\underline{r} \wedge \underline{F} = \underline{0} \quad (26-2)$$

أخيراً يمكن إيجاد درجة اللولبية ومعادلتها من التعريف كما يلى:

بما أن Q نقطة على محور اللولبية وعندها المجموعة تكافئ قوة $\underline{F}$ وازدواج

$$\underline{M}' = P \underline{F}$$

$$\therefore P \underline{F} = \underline{M} - \underline{r} \wedge \underline{F}$$



(i) بضرب طرفي المعادلة

قياسيا في $\underline{F}$ نحصل على:

$$PF \cdot \underline{F} = \underline{F} \cdot \underline{M} - \underline{F} \cdot (\underline{r} \wedge \underline{F})$$

$$\therefore P = \frac{\underline{F} \cdot \underline{M}}{F^2} \quad (ii)$$

وهي نفس النتيجة السابقة.

بضرب طرفي المعادلة (i) من اليسار باتجاهيا في $\underline{F}$:

$$PF \wedge \underline{F} = \underline{F} \wedge \underline{M} - \underline{F} \wedge (\underline{r} \wedge \underline{F})$$

$$\underline{F} \wedge \underline{M} = F^2 \underline{r} - (\underline{F} \cdot \underline{r}) \underline{F}$$

$$\therefore \underline{r} - \frac{\underline{F} \wedge \underline{M}}{F^2} = \frac{\underline{F} \cdot \underline{r}}{F^2} \underline{F} \quad (iii)$$

وهي على الصورة

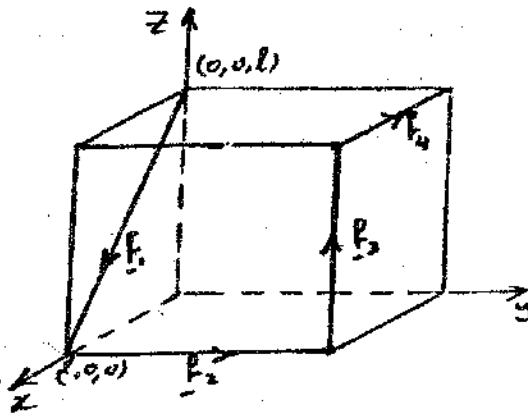
$$\underline{r} - \underline{r}_0 = \mu \underline{F} \quad (iv)$$

وهي معادلة خط مستقيم يمر بالنقطة $\underline{r}_0 = \frac{\underline{F} \wedge \underline{M}}{F^2}$ ويوازي المتجه $\underline{F}$.

الاتجاهية لمحور اللولبية).

وأخيرا المعادلة (iv) يمكن وضعها على الصورة (2) -

مثال (٥) :



أربعة قوى مقاديرها تتناسب مع أطوال الخطوط الممثلة لها على المكعب المبينة بالرسم. أوجد اللولبية المكافئة ومعادلة محورها.

الحل :

بوضع مجموعة القوى ونقط تأثيرها كما يلي:

بما أن مجموعة القوى تتناسب مع أطوال الأضلاع الممثلة لها ، وبفرض أن ثابت التناسب هو f وحدة القوى. إذن

$$f_1 = \sqrt{2} f, \quad f_2 = f_3 = f_4 = f$$

$$\underline{f}_1 = f(\underline{\hat{i}} - \underline{\hat{k}}), \quad \underline{f}_2 = f \underline{\hat{j}} \rightarrow (l, 0, 0),$$

$$\underline{f}_3 = f \underline{\hat{k}}, \quad \underline{f}_4 = -f \underline{\hat{i}} \rightarrow (l, l, l)$$

ومحصلة هذه القوى $\underline{F} = f \underline{\hat{j}}$ وعزمها $\underline{M}$ عند نقطة الأصل هي :

$$\therefore \underline{M} = l \underline{\hat{i}} \wedge (\underline{f}_1 + \underline{f}_2) + l [(\underline{\hat{i}} + \underline{\hat{j}} + \underline{\hat{k}}) \wedge (\underline{f}_3 + \underline{f}_4)]$$

$$= l f \begin{vmatrix} \underline{\hat{i}} & \underline{\hat{j}} & \underline{\hat{k}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} + l f \begin{vmatrix} \underline{\hat{i}} & \underline{\hat{j}} & \underline{\hat{k}} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = l f (\underline{\hat{i}} - \underline{\hat{j}} + 2\underline{\hat{k}})$$

$$\therefore \underline{F} \cdot \underline{M} = -\ell f^2 \neq 0$$

أى أن المجموعة تختزل إلى لولبية درجتها

$$P = \frac{\underline{F} \cdot \underline{M}}{F^2} = \frac{-\ell f^2}{f^2} = -\ell$$

وهذه اللولبية هي القوة $\underline{F} = f \underline{\hat{j}}$ والازدواج $\underline{M}' = P \underline{F} = -\ell f \underline{\hat{j}}$ ومعادلة خط عملها يكون

$$\underline{r} \wedge \underline{F} = \underline{M} - P \underline{F}$$

$$\therefore \begin{vmatrix} \underline{\hat{i}} & \underline{\hat{j}} & \underline{\hat{k}} \\ x & y & z \\ 0 & f & 0 \end{vmatrix} = \ell f (\underline{\hat{i}} - \underline{\hat{j}} + 2\underline{\hat{k}}) + \ell f \underline{\hat{j}}$$

$$\Rightarrow f(-z\underline{\hat{i}} + x\underline{\hat{k}}) = \ell f (\underline{\hat{i}} + 2\underline{\hat{k}})$$

ومنها ينتج المعادلتين $x = 2\ell, \quad z = -\ell$

أى أن الإحداثيين x, z قد تحددت قيمتهما وبذلك فإن الخط المستقيم الناتج يكون موازيا لمحور y ويقطع مستوى xz فى النقطة $(2\ell, 0, -\ell)$.

(٢) اختزال مجموعة من القوى إلى قوة فقط :

مما سبق نعلم أنه يمكن اختزال مجموعة من القوى عند نقطة ما إلى قوة وازدواج. إذا تلاشى عزم الازدواج المحصل حول نقطة ما ولتكن O' ، أى أن $\underline{M}' = 0$ فإن المجموعة تختزل عند هذه النقطة إلى قوة فقط وهى عبارة عن محصلة القوى $\underline{F}$. ومن العلاقة (2-15) نجد أن

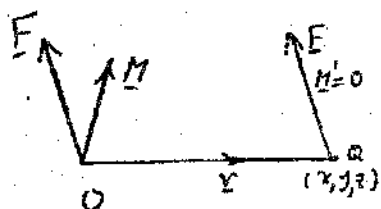
$$\underline{M} = \underline{r}' \wedge \underline{F}$$

حيث $\underline{r}'$ متجه موضع النقطة O' .

وبضرب المعادلة السابقة قياسياً في المتجه $\underline{F}$ نحصل على

$$\underline{F} \cdot \underline{M} = 0 \quad (27-2)$$

وهو الشرط اللازم توافره حتى يمكن إختزال مجموعة من القوى إلى قوة فقط عند أى نقطة في الفراغ عدا نقطة الأصل شريطة أن $\underline{M} \neq 0$.



ولإيجاد معادلة خط عمل القوة الوحيدة $\underline{F}$:

نفرض عند النقطة العامة $Q(x, y, z)$ تم

إختزال المجموعة إلى قوة وحيدة $\underline{F}$ (أى

أن $\underline{M}' = 0$) وباستخدام (15-2)

$$\underline{M}' = \underline{M} - \underline{r} \wedge \underline{F}$$

وبالتالى معادلة خط عمل القوة الوحيدة $\underline{F}$ يأخذ الصورة:

$$\underline{r} \wedge \underline{F} = \underline{M} \quad (28-2)$$

ويمكن وصفها في الصورة الكارتيزية

$$\left. \begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \right\} \quad (29-2)$$

حالة خاصة:

إذا كان $\underline{M} = 0$ عند نقطة الأصل فإن المجموعة تكافئ قوة $\underline{F}$ تمر بنقطة الأصل

ومعادلتها $\underline{r} \wedge \underline{F} = 0$

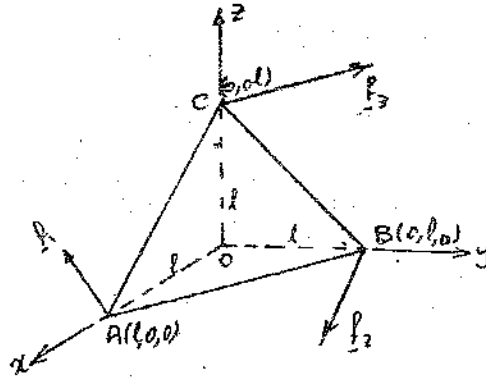
مثال (٦) :

إذا كانت A, B, C نقط ثلاثه على محاور الاسناد x, y, z على الترتيب بحيث كانت أبعادها عن نقطة الأصل ℓ . إذا أثرت القوى $f, 2f, 3f$ عند هذه النقط على الترتيب وفي الاتجاهات $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ فاثبت أن هذه المجموعة تؤول إلى قوة فقط وأوجد معادلة خط عملها.

الحل :

نوجد أولا متجهات الوحدة للقوى الثلاثة:

$$\underline{\hat{f}}_1 = \frac{\overline{BC}}{BC} = \frac{-\ell \hat{j} + \ell \hat{k}}{\sqrt{\ell^2 + \ell^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\hat{j} + \hat{k})$$



$$\underline{\hat{f}}_2 = \frac{\overline{CA}}{CA} = \frac{\ell \hat{i} - \ell \hat{k}}{\sqrt{\ell^2 + \ell^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{i} - \hat{k})$$

$$\underline{\hat{f}}_3 = \frac{\overline{AB}}{AB} = \frac{-\ell \hat{i} + \ell \hat{j}}{\sqrt{\ell^2 + \ell^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\hat{i} + \hat{j})$$

ونقط تأثيرها على الترتيب هي

$$A(\ell, 0, 0), B(0, \ell, 0), C(0, 0, \ell)$$

ومحصلة هذه القوى $\underline{F}$ ومحصلة عزومها $\underline{M}$ عند نقطة الأصل هي :

$$\underline{F} = \underline{f}_1 + \underline{f}_2 + \underline{f}_3$$

$$\therefore \underline{F} = \frac{f}{\sqrt{2}}(-\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}), \quad (1)$$

$$\underline{M} = \underline{r}_1 \wedge \underline{f}_1 + \underline{r}_2 \wedge \underline{f}_2 + \underline{r}_3 \wedge \underline{f}_3$$

$$= \ell \hat{i} \wedge \frac{f}{\sqrt{2}}(-\hat{j} + \hat{k}) + \ell \hat{j} \wedge \frac{2f}{\sqrt{3}}(\hat{i} - \hat{k}) + \ell \hat{k} \wedge \frac{3f}{\sqrt{2}}(-\hat{i} + \hat{j})$$

$$= \frac{\ell f}{\sqrt{2}}[-\hat{k} - \hat{j} + 2(-\hat{k} - \hat{i}) + 3(-\hat{j} - \hat{i})]$$

$$\therefore \underline{M} = \frac{\ell f}{\sqrt{2}}(-5\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k}) \quad (2)$$

من (1), (2) نجد أن

$$\underline{F} \cdot \underline{M} = \frac{1}{2} f^2 \ell (5 - 8 + 3) = 0 \quad (3)$$

أى أن المجموعة تكافئ القوة $\underline{F}$ ويعطى خط عملها بالمعادلة الاتجاهية (حيث $\underline{M}' = 0$)
(التالية:

$$\underline{M} = \underline{r} \wedge \underline{F} = \frac{f}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{f}{\sqrt{2}} [(-y - 2z)\hat{i} + (-z + x)\hat{j} + (2x + y)\hat{k}]$$

ومنها ينتج معادلات خط عمل القوة الوحيدة $\underline{F}$ كما يلي :-

$$y + 2z = 5\ell, \quad z - x = 4\ell, \quad 2x + y = -3\ell \quad (4)$$

ويلاحظ انه يمكن استبعاد احدى المعادلات الثلاثة السابق (لأنه يمكن الحصول عليها من حل المعادلتين الأخرتين).

ولإيجاد صورة كارتيزية لمعادلة هذا المستقيم نقوم بإيجاد نقطة عليه ولتكن (x_0, y_0, z_0) وذلك باختيار $z_0 = 0$ - مثلاً نحصل من المعادلات (4) على

$$y_0 = 5\ell, \quad y_0 = -4\ell$$

وبالتالى فإن الصورة الكارتيزية لخط عمل القوة الوحيدة $\underline{F}$ تكون

$$\frac{x+4\ell}{-1} = \frac{y-5\ell}{2} = \frac{z}{-1} \quad (4)'$$

ملحوظة :

١- المعادلات الكارتيزية للخط المستقيم:

$$\frac{x-x_0}{F_x} = \frac{y-y_0}{F_y} = \frac{z-z_0}{F_z} \quad (30-2)$$

ليست وحيدة وذلك تبعاً لاختيار النقطة (x_0, y_0, z_0) . فإذا اخترنا فى هذا المثال

$x_0 = 0$ فإنه من المعادلات (4) نحصل على: $y_0 = -3\ell$ ، $z_0 = 4\ell$ وتصبح

المعادلة الكارتيزية على الصورة:

$$\frac{x}{-1} = \frac{y+3\ell}{2} = \frac{z-4\ell}{-1} \quad (4)''$$

وهى صورة أخرى لخط عمل القوة الوحيدة $\underline{F}$.

١- يمكن تعيين النقطة $\vec{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ من العلاقة

$$\underline{r}_o = \frac{\underline{F} \wedge \underline{M}}{F^2} = x_o \underline{\hat{i}} + y_o \underline{\hat{j}} + z_o \underline{\hat{k}}$$

دون الحاجة إلى استنتاج المعادلات (4). وفي هذا المثال $F^2 = 3f^2$

$$\begin{aligned} \therefore \underline{r}_o &= \frac{\underline{F} \wedge \underline{M}}{F^2} = \frac{1}{3f^2} \cdot \frac{\ell f}{\sqrt{2}} \cdot \frac{f}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \underline{\hat{i}} & \underline{\hat{j}} & \underline{\hat{k}} \\ -1 & 2 & -1 \\ -5 & -4 & -3 \end{vmatrix} \\ &= \frac{\ell}{6} [-10\underline{\hat{i}} + 2\underline{\hat{j}} + 14\underline{\hat{k}}] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_o = \frac{-5\ell}{3}, \quad y_o = \frac{\ell}{3}, \quad z_o = \frac{7\ell}{3}$$

والمعادلة الكارتيزية في هذه الحالة

$$\frac{x - 5\ell/3}{-1} = \frac{y - \ell/3}{2} = \frac{z - 7\ell/3}{-1} \quad (4)''$$

وللتأكد من صحة هذه النتيجة نختار $x_o = -5\ell/3$ وبالتعويض في المعادلات (4) نحصل على:

$$z_o - \frac{-5\ell}{3} = 4\ell \Rightarrow z_o = 4\ell - \frac{5}{3}\ell = \frac{7}{3}\ell,$$

$$2\frac{-5\ell}{3} + y_o = -3\ell \Rightarrow y_o = \frac{10}{3}\ell - 3\ell = \frac{1}{3}\ell$$

٣- اختزال مجموعة من القوى إلى ازدواج فقط:

من الواضح أنه طالما كانت محصلة مجموعة من القوى $\underline{F}$ لا تساوى الصفر فلا

يمكن بأى حال من الأحوال جعلها تتلاشى بتغيير نقطة التأثير.

وعلى ذلك فإن مجموعة القوى تختزل إلى ازدواج فقط عندما تتلاشى محصلة هذه القوى (ويكون الازدواج وحيداً، أى أنه لا يعتمد على النقطة التى نختزل المجموعة عندها). أى أن

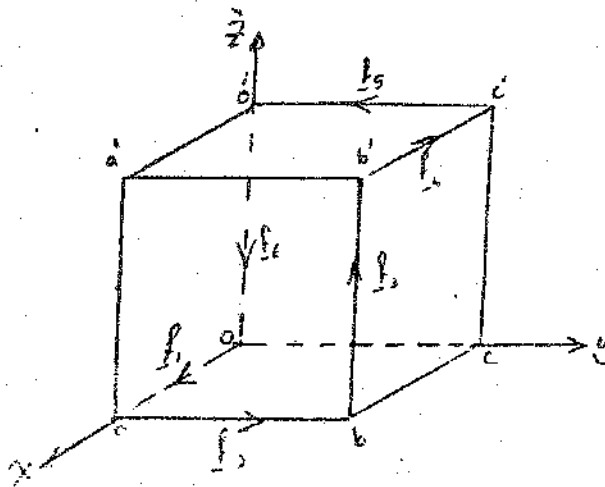
$$\underline{F} = \underline{0} \quad (31-2)$$

وفى هذه الحالة إذا لم تتلاشى أيضاً محصلة عزوم هذه القوى حول نقطة الأصل أى أن $\underline{M} \neq \underline{0}$ فإن مجموعة القوى تكون ازدواجاً عزمه $\underline{M}$ وهو متجه ثابت لا يعتمد على اختيار النقطة Q التى يحسب حولها عزوم القوى وهذا واضح من المعادلة (2-15)

$$\underline{M}' = \underline{M} \quad \text{نجد أن } \underline{F} = \underline{0}$$

مثال (٧):

سنة قوى كل منها f تؤثر فى ترتيب دورى واحد فى ستة أحرف من المكعب التى لا تقابل قطراً معيناً من أقطاره. اثبت أن المجموعة تؤول إلى ازدواج عزمه $2\sqrt{3} f \ell$ حيث ℓ طول ضلع المكعب.



الحل:

باختيار القطر ca' لا تتقابل عنده مجموعة القوى كما بالشكل التالى. وتصبح مجموعة القوى ونقط تأثيرها كما يلى:

$$\underline{f}_1 = f \hat{i}, \quad \underline{f}_6 = -f \hat{k}$$

وتؤثر القوتين عند النقطة $(0,0,0)$

$$\underline{f}_2 = f \underline{\hat{j}}, \quad \underline{f}_3 = f \underline{\hat{k}}$$

وتؤثر القوتين عن النقطة $b(\ell, \ell, 0)$

$$\underline{f}_4 = -f \underline{\hat{i}}, \quad \underline{f}_5 = -f \underline{\hat{j}}$$

وتؤثر القوتين عن النقطة $c'(0, \ell, \ell)$

وعلى ذلك فإن المحصلة تكون :

$$\underline{F} = \sum_{n=1}^6 \underline{f}_n = f \underline{\hat{i}} - f \underline{\hat{k}} + f \underline{\hat{j}} + f \underline{\hat{k}} - f \underline{\hat{i}} - f \underline{\hat{j}} = \underline{0}$$

ومحصلة عزومها حول نقطة الأصل O هي :

$$\underline{M} = \sum_{n=1}^6 \underline{r}_n \wedge \underline{f}_n$$

$$= \underline{0} \wedge (\underline{f}_1 + \underline{f}_6) + \ell (\underline{\hat{i}} + \underline{\hat{j}}) \wedge (\underline{f}_2 + \underline{f}_3) + \ell (\underline{\hat{j}} + \underline{\hat{k}}) \wedge (\underline{f}_4 + \underline{f}_5)$$

$$= \ell f [(\underline{\hat{i}} + \underline{\hat{j}}) \wedge (\underline{\hat{j}} + \underline{\hat{k}}) + \ell f (\underline{\hat{j}} + \underline{\hat{k}}) \wedge (-\underline{\hat{i}} - \underline{\hat{j}})]$$

$$= 2\ell f (\underline{\hat{i}} + \underline{\hat{j}}) \wedge (\underline{\hat{j}} + \underline{\hat{k}}) = 2\ell f (\underline{\hat{i}} + \underline{\hat{j}}) \wedge (\underline{\hat{j}} + \underline{\hat{k}})$$

إذن المجموعة تكافئ ازدواج فقط حيث $\underline{F} = \underline{0}$ وعزم هذا الازدواج هو

$$\underline{M} = 2\ell f (\underline{\hat{i}} - \underline{\hat{j}} + \underline{\hat{k}})$$

$$M = 2\ell f \sqrt{1+1+1} = 2\sqrt{3} \ell f \quad \text{ومقداره}$$

٤- شروط اتزان مجموعة من القوى :

إذا أثرت مجموعة من القوى على جسم جاسئ نعلم انه يمكن إختزال هذه المجموعة عند أى نقطة Q مثلاً إلى المحصلة $\underline{F}$ وازدواج عزمه $\underline{M}_Q$. فإن التأثير لا ينعدم ولا يتزن الجسم إلا إذا انعدم كل من القوة والازدواج كل على حدة ، أى أن $\underline{F}=0, \underline{M}_Q=0$ من المعادلة (2-15) نحصل على أن $\underline{M}=0$ أى أن شروط اتزان مجموعة من القوى المؤثرة على جسم هي

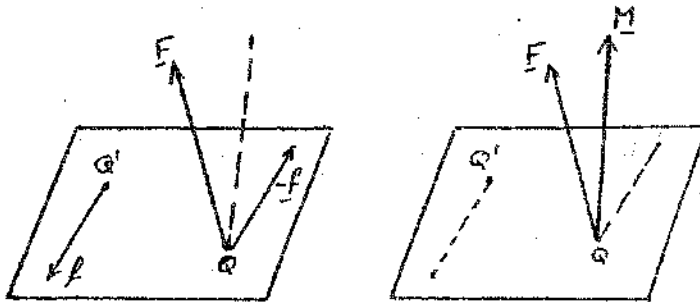
$$\underline{F}=0 , \quad \underline{M}=0 \quad (2-32)$$

وهاتين المعادلتين الاتجاهيتين هما بالطبع ستة معادلات قياسية هي:

$$\left. \begin{array}{l} F_x = F_y = F_z = 0 , \\ M_x = M_y = M_z = 0 \end{array} \right\} \quad (2-33)$$

البرهان :

نعتبر المستوى العمودى على $\underline{M}$ والمار بالنقطة Q ثم نستبدل هذا الازدواج $\underline{M}$ بالقوتين $\underline{f}, -\underline{f}$ فى ذلك المستوى وبحيث تمر احدى هاتين القوتين ($-\underline{f}$) بالنقطة Q وهى نفس نقطة تأثير المحصلة $\underline{F}$ وعلى ذلك فإن القوة الأخرى $\underline{f}$ سوف تؤثر عند نقطة أخرى Q' كما بالشكل.



وعلى ذلك فإن محصلة القوتين $\underline{f}$, $\underline{f}$ - تؤثر فى النقطة Q بينما تؤثر القوة $\underline{f}$ فى النقطة Q' ولا يمكن أن تتزن هذه القوة $\underline{f}$ ومحصلة القوتين $\underline{f}$, $\underline{f}$ - إلا إذا أثرا فى نفس النقطة أو كان خطى عملهما واحد وتتلاقى محصلتهما.

وعلى ذلك يجب أن تنعدم القوة $\underline{F}$ والمسافة العمودية بين القوتين $\underline{f}$, $\underline{f}$ - أى ينعدم أيضا الأزواج $\underline{M}$. وعلى ذلك فإن شرط اتزان المجموعة هو $\underline{F} = 0$, $\underline{M} = 0$. وهو المطلوب

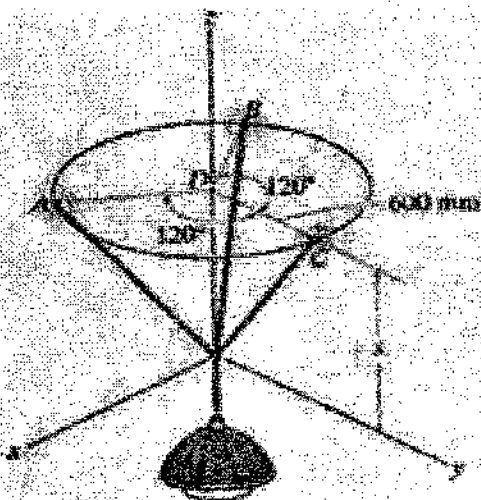
حالة خاصة:

إذا تلاقت جميع القوى المؤثرة على الجسم المتماسك. باختيار نقطة الأصل O عند نقطة تلاقى القوى المؤثرة على الجسم. ينعدم تلقائيا الأزواج $\underline{M}$ وبذلك يصبح شرط الاتزان فى هذه الحالة هو $\underline{F} = 0$ ومنه نحصل على ثلاث معادلات قياسية:

$$F_x = F_y = F_z = 0 \quad (34-2)$$

مثال (٨):

علقت لمبة وزنها 10 kg بثلاثة خيوط غير مرنة كما بالشكل. إذا علم أن الشد فى أى من الخيوط لا يزيد عن 50 N أوجد أقصر عمق للمبة حتى تصبح فى وضع اتزان.



الحل :

من تماثل الخيوط الثلاثة وبفرض أن θ هي زاوية ميل أى من الخيوط مع الرأسى

لأعلى نجد أن

$$3(50\cos\theta) - 10(9.81) = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{98.1}{150}$$

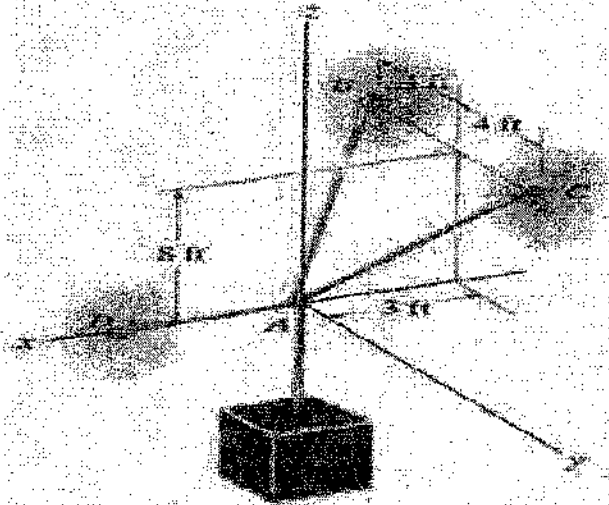
بفرض أن أقصر عمق للمبة حتى تصبح فى وضع اتزان هو d ، إذن

$$\tan\theta = \frac{600}{d} \Rightarrow d = 519 \text{ mm}$$

مثال (٩):

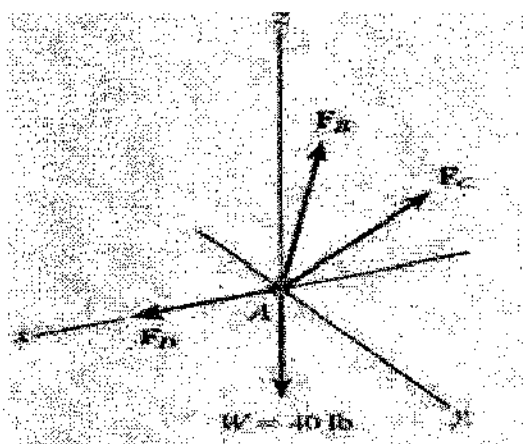
عين قوة الشد فى كل سلك واللازمة لتثبيت الصندوق الموضح بالشكل علما بأن وزن

الصندوق يساوى 40 lb



الحل:

بفرض أن قوة الشد فى السلك AB هي F_B ، قوة الشد فى السلك AC هي F_C



و قوة الشد في السلك AD هي F_D .

أولا نغير عن كل قوة في صورة متجه. بما أن إحداثيات النقط B, C هي $B(-3, -4, 8), C(-3, 4, 8)$

$$\therefore \vec{F}_B = F_B \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = F_B (-0.318\hat{i} - 0.424\hat{j} + 0.848\hat{k}),$$

$$\vec{F}_C = F_C \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} = F_C (-0.318\hat{i} + 0.424\hat{j} + 0.848\hat{k}),$$

$$\vec{F}_D = F_D \hat{i}, \quad \vec{F}_W = -40\hat{k}$$

من شرط الاتزان أن محصلة القوى تتعدم

$$\therefore \vec{F} = \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D + \vec{F}_W = \vec{0}$$

وبالتالي يمكن الحصول على

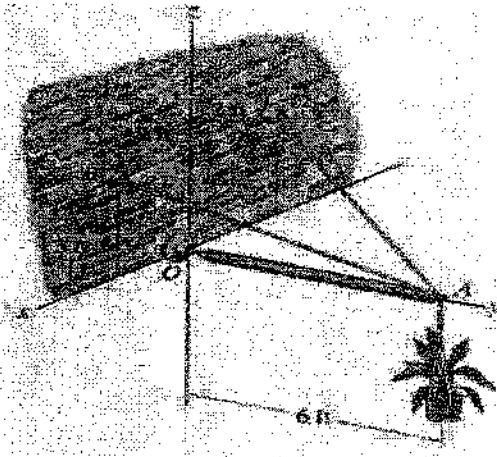
$$F_x = 0 \Rightarrow -0.318F_B - 0.318F_C + F_D = 0 \quad (1)$$

$$F_y = 0 \Rightarrow F_B = F_C \quad (2)$$

$$F_z = 0 \Rightarrow 0.848F_B + 0.848F_C - 40 = 0 \quad (3)$$

بحل المعادلات الثلاث نجد أن

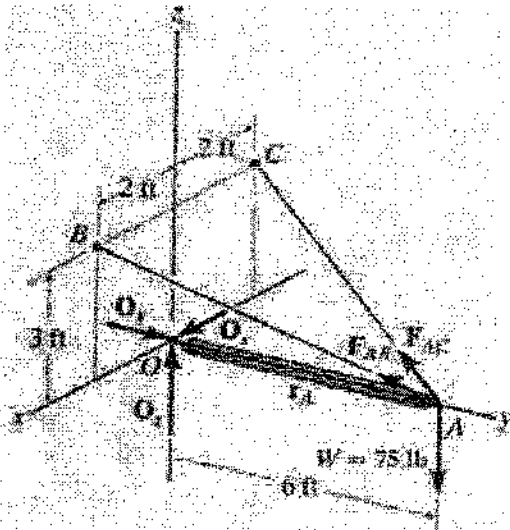
$$F_B = F_C = 23.6 \text{ lb}, \quad F_D = 15 \text{ lb}$$



مثال (١٠) :

يتزن ذراع الرافعة المبين بالشكل بواسطة قصرية زهور وزنها 75 lb والسلكين AB, AC. أوجد الشد في هذين السلكين.

الحل:



بفرض أن قوة الشد في السلك

AB هي F_{AB} ، قوة الشد في

السلك AC هي F_{AC} ، وقوة

الشد في السلك AD هي F_D .

أولا نعبر عن كل قوة في

صورة متجه.

بما أن إحداثيات النقط A, B, C هي $A(0,6,0)$, $B(2,0,3)$, $C(-2,0,3)$

$$\therefore \vec{F}_{AB} = F_B \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = \frac{F_{AB}}{7} (2\hat{i} - 6\hat{j} + 3\hat{k}) ,$$

$$\vec{F}_{AC} = F_{AC} \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} = \frac{F_{AC}}{7} (-2\hat{i} - 6\hat{j} + 3\hat{k}) ,$$

$$\vec{F}_W = -75\hat{k}$$

من شروط الاتزان أن ينعلم كل من محصلة وعزوم القوى حول أية نقطة من نقاط الجسم. نلاحظ أنه يوجد رد فعل عند نقطة تثبيت الطرف O وله ثلاث مركبات ولأننا لا نريد حسابه سنقوم باستخدام شرط انعدام عزم المحصلة حول النقطة O .

$$\vec{M} = \vec{OA} \wedge (\vec{F}_{AB} + \vec{F}_{AC} + \vec{F}_W) = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{AC} + \vec{F}_W &= \frac{2}{7}(F_{AB} - F_{AC})\hat{i} - \frac{6}{7}(F_{AB} + F_{AC})\hat{j} \\ &\quad + [\frac{3}{7}(F_{AB} + F_{AC}) - 75]\hat{k} \end{aligned}$$

وبالتالى نحصل على

$$M_x = 0 \Rightarrow 18F_{AB} + 18F_{AC} = 3150 \quad (1)$$

$$M_y = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

$$M_z = 0 \Rightarrow F_{AB} = F_{AC} \quad (2)$$

من (1), (2) نجد أن

$$F_{AB} = F_{AC} = 87.5 \text{ lb}$$

مثال (١١):

$ABCD A'B'C'D'$ مكعب طول ضلعه ℓ أثرت القوى $f_1 = 2\sqrt{2}$ فى $\vec{A'C'}$ ،

والقوة $f_2 = 2\sqrt{3}$ فى $\vec{AC'}$ والقوة $f_3 = 4$ فى $\vec{A'A}$. فأوجد متجهى القوتين

المؤثرتين عند B, C حتى يتزن المكعب علما بأن القوة المؤثرة عند C تقع في المستوى $DCD'C'$.

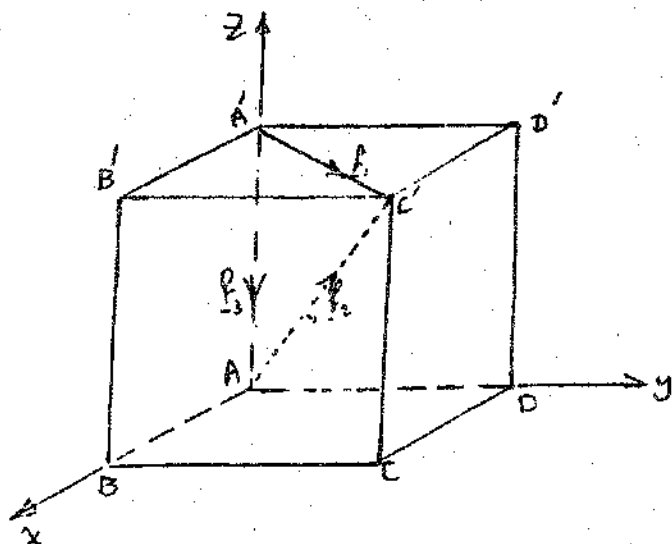
الحل:

نفرض أن القوة التي تؤثر عند النقطة $B(l, 0, 0)$ هي

$$\underline{F}_B = F_{x_1} \underline{\hat{i}} + F_{y_1} \underline{\hat{j}} + F_{z_1} \underline{\hat{k}}$$

والقوة التي تؤثر عند النقطة $C(l, l, 0)$ هي

$$\underline{F}_C = F_{x_2} \underline{\hat{i}} + F_{z_2} \underline{\hat{k}}$$



ومن الشكل نجد أن القوة $\underline{F}_1 = 2\underline{\hat{i}} + 2\underline{\hat{j}}$ تؤثر عند النقطة $A'(0, 0, l)$ ، والقوتين

$$\underline{F}_2 = 2\underline{\hat{i}} + 2\underline{\hat{j}} + 2\underline{\hat{k}}, \quad \underline{F}_3 = -4\underline{\hat{k}}, \quad \text{تؤثران عند نقطة الأصل } (0, 0, 0)$$

نلاحظ أن جيوب تمام اتجاه المستقيم $\overline{AC'}$ هي $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ باختزال المجموعة عند

نقطة الأصل A . محصلة هذه القوى $\underline{F}$:

$$\underline{F} = (F_{x_1} + F_{x_2} + 4)\hat{i} + (F_{y_1} + 4)\hat{j} + (F_{z_1} + F_{z_2} - 2)\hat{k} \quad (1)$$

وازواج عزمه :

$$\underline{M} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \ell & 0 & 0 \\ F_{x_1} & F_{y_1} & F_{z_1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \ell & \ell & 0 \\ F_{x_2} & 0 & F_{z_2} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \ell \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\ell F_{z_1} \hat{j} + \ell F_{y_1} \hat{k} + \ell F_{z_2} \hat{i} - \ell F_{z_2} \hat{j} - \ell F_{x_2} \hat{k} - 2\ell \hat{i} + 2\ell \hat{j}$$

$$= \ell(F_{z_2} - 2)\hat{i} + \ell(2 - F_{z_1} - F_{z_2})\hat{j} + \ell(F_{y_1} - F_{x_2})\hat{k} \quad (2)$$

وحتى يتزن الجسم $\underline{F} = 0$, $\underline{M} = 0$ من المعادلتين (1), (2) نحصل على المعادلات

$$F_{x_1} + F_{x_2} + 4 = 0 \quad (i)$$

$$F_{y_1} + 4 = 0 \Rightarrow F_{y_1} = -4 \quad (ii)$$

$$F_{z_1} + F_{z_2} - 2 = 0 \quad (iii)$$

$$F_{z_2} - 2 = 0 \Rightarrow F_{z_2} = 2 \quad (iv)$$

$$F_{y_1} - F_{x_2} = 0 \quad (v)$$

$$F_{x_2} = -4 \quad \text{من (ii) في (v) نحصل على}$$

$$F_{z_1} = 0$$

من (iv) فى (iii) نحصل على

$$F_{x_1} = 0$$

وبالتعويض عن F_{x_2} فى (i) نحصل على

$$\underline{F}_B = -4\underline{j}$$

إذن القوة عند B :

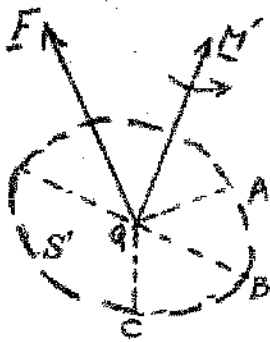
$$\underline{F}_C = -4\underline{i} + 2\underline{k}$$

والقوة عند C :

٥- خطوط ومستويات الخمود (المستويات الصفيرية)

نعلم انه يمكن اختزال أى مجموعة من القوى عند أى نقطة (ولتكن Q إلى قوة $\underline{F}$

وازدواج عزمه $\underline{M}'$.



باختيار المستوى S' العمودى على $\underline{M}'$ ويمر

بالنقطة Q وبذلك تكون المستقيمتان $QC, QB,$

QA ، ... عمودية على الازدواج $\underline{M}'$.

يلاحظ أن عزم المجموعة حول أى مستقيم مار

بالنقطة Q وواقع فى المستوى S' يساوى الصفر.

مثلا العزوم حول QA تتلاشى لأن العزم يساوى

مركبة $\underline{M}'$ فى اتجاه QA مضافا إليه عزم $\underline{F}$ المؤثر فى Q .

يسمى المستقيم الذى تتلاشى عزوم المجموعة حوله بالخط الصفيرى (خط الخمود)

المرافق للنقطة Q .

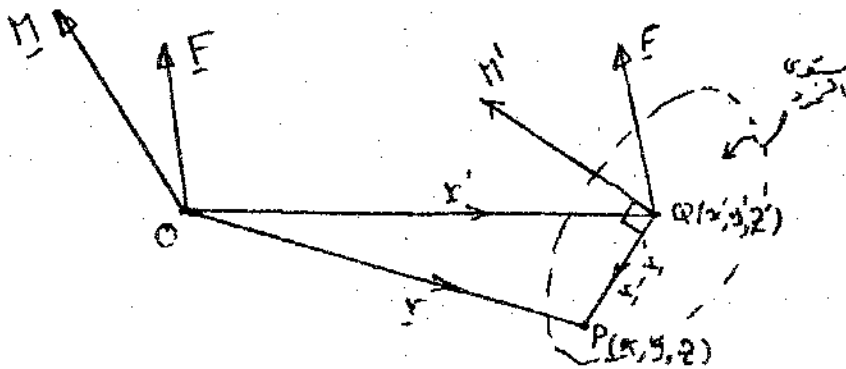
ويلاحظ أن هناك عدد لا نهائى من الخطوط كلها عمودية على $\underline{M}'$ وكلها تمر بالنقطة

Q . هذه الخطوط المستقيمة الصفيرية يجمعها مستوى يمر بالنقطة Q ويكون عموديا

على $\underline{M'}$ ويسمى هذا المستوى "S" بالمستوى الصفري (مستوى الخمود) المرافق للنقطة Q .

ولإيجاد معادلة مستوى الخمود المرافق للنقطة Q حيث $Q(x', y', z')$. نفرض أن نقطة عامة في هذا المستوى $P(x, y, z)$.

نعلم أن المجموعة تكافئ $\underline{F}$ ، $\underline{M}$ عند نقطة الأصل O وتكافئ أيضا $\underline{F}$ ، $\underline{M'}$ عند



النقطة $Q(x', y', z')$ حيث

$$\underline{M'} = \underline{M} - \underline{r'} \wedge \underline{F}$$

ومن هذه العلاقة نحصل على $\underline{M'}$ وهو قيمة متجه عمودي على مستوى الخمود

المطلوب إيجاد معادلته. ونعلم أن $\overrightarrow{QP}$ متجه واقع في مستوى الخمود حيث

$$\overrightarrow{QP} = \underline{r} - \underline{r'} = (x - x')\underline{i} + (y - y')\underline{j} + (z - z')\underline{k}$$

إذن معادلة المستوى المطلوبة

$$(\underline{r} - \underline{r'}) \cdot \underline{M'} = 0$$

$$M'_x(x-x') + M'_y(y-y') + M'_z(z-z') = 0 \quad (35-2)$$

وبالتعويض عن المتجه $\underline{M}'$ من المعادلة السابقة

$$\therefore \underline{M}' \cdot (\underline{r} - \underline{r}') = 0$$

$$(\underline{M} - \underline{r}' \wedge \underline{F}) \cdot (\underline{r} - \underline{r}') = 0$$

$$\underline{M} \cdot (\underline{r} - \underline{r}') - (\underline{r}' \wedge \underline{F}) \cdot (\underline{r} - \underline{r}') = 0$$

$$= (\underline{r}' \wedge \underline{F}) \cdot \underline{r} - (\underline{r}' \wedge \underline{F}) \cdot \underline{r}'$$

إذن معادلة مستوى الخمود (35-2) تأخذ الصورة

$$\underline{M} \cdot (\underline{r} - \underline{r}') = \underline{r}' \cdot (\underline{r}' \wedge \underline{F}) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (36-2)$$

يلاحظ أن معادلة مستوى الخمود في الصورة السابقة لا تحتاج إلى تعيين $\underline{M}'$.

مثال (١٢) :

أربعة قوى متساوية مقدار كل منها f تؤثر في محاور الأحداثيات الثلاثة وفي

المستقيم $x-1=y-2=z-3$ أوجد

- i- القوة التي تؤثر في نقطة الأصل والازدواج المكافئان للمجموعة.
- ii- القوة التي تؤثر في (1,2,3) والازدواج المكافئان للمجموعة.
- iii- المستوى الصفري المرافق للنقطة (1,2,3) واثبت أنه يمر بنقطة الأصل.
- iv- المستوى الصفري المصاحب للنقطة (1,1,1).

الحل :

يمكن كتابة مجموعة القوى ونقطة التأثير كما يلي

$$\underline{f}_3 = f \underline{\hat{k}}, \quad \underline{f}_2 = f \underline{\hat{j}}, \quad \underline{f}_1 = f \underline{\hat{i}}$$

وتؤثر جميعها في نقطة الأصل (0,0,0) ، والقوة

$$\underline{f}_4 = f(\underline{\hat{i}} + \underline{\hat{j}} + \underline{\hat{k}}) / \sqrt{3}$$

وتؤثر في النقطة (1,2,3).

i- باختزال المجموعة عند نقطة الأصل إلى المحصلة $\underline{F}$ وازدواج عزمه $\underline{M}$:

$$\underline{F} = \sum_{n=1}^4 \underline{F}_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) f(\underline{\hat{i}} + \underline{\hat{j}} + \underline{\hat{k}}) \quad (1)$$

$$\underline{M} = \sum_{n=1}^4 \underline{r}_n \wedge \underline{F}_n = \underline{0} + \underline{0} + \underline{0} + \frac{f}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} \underline{\hat{i}} & \underline{\hat{j}} & \underline{\hat{k}} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \underline{M} = \frac{f}{\sqrt{3}}(-\underline{\hat{i}} + 2\underline{\hat{j}} - \underline{\hat{k}}) \quad (2)$$

من (1), (2) نحصل على المطلوب أولاً.

ii- إختزال المجموعة عند النقطة (1,2,3) إلى المحصلة $\underline{F}$ وازدواج عزمه $\underline{M}'$:

$$\underline{F} = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) f(\underline{\hat{i}} + \underline{\hat{j}} + \underline{\hat{k}}) \quad (1)'$$

$$\underline{M}' = \underline{M} - \underline{r}' \wedge \underline{F}$$

$$= \frac{f}{\sqrt{3}}(-\underline{\hat{i}} + 2\underline{\hat{j}} - \underline{\hat{k}}) - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \begin{vmatrix} \underline{\hat{i}} & \underline{\hat{j}} & \underline{\hat{k}} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{f}{\sqrt{3}}(-\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)f(-\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$$

$$\therefore \underline{M}' = f(\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) \quad (2)'$$

من (1)', (2)' نحصل على المطلوب ثانياً.

iii - معادلة المستوى الصفري المرافق للنقطة (1, 2, 3) باستخدام المعادلة (2-35)

$$\underline{M}' \cdot (\underline{r} - \underline{r}') = 0$$

$$f(x-1) - 2f(y-2) + f(z-3) = 0$$

$$\Rightarrow x - 2y + z = 0$$

وهي معادلة المستوى الصفري المار بالنقطة (1, 2, 3) واضح انها تمر بنقطة الأصل

(0, 0, 0). يمكن الحصول على نفس النتيجة باستخدام المعادلة (2-36).

v - لإيجاد المستوى الصفري المار بالنقطة (1, 1, 1) سوف نستخدم المعادلة (2-38)

وذلك بدلا من إختزال المجموعة عند النقطة (1, 1, 1).

$$\underline{M} \cdot (\underline{r} - \underline{r}') = \underline{r} \cdot (\underline{r}' \wedge \underline{F}) \quad (*)$$

حيث

$$\underline{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}, \quad \underline{r}' = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$$

$$\underline{F} = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)f(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}),$$

$$\underline{M} = \frac{f}{\sqrt{3}}(-\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$$

وبالتعويض في (*) نجد أن :

$$\frac{f}{\sqrt{3}}[-(x-1)+2(y-1)-(z-1)]=\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)f\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$\therefore (x-1)-2(y-1)+(z-1)=0$$

$$\Rightarrow x-2y+z=0$$

وهى معادلة مستوى الخمود المرافق للنقطة (1,1,1) وهو المطلوب أخيراً.

٦- القوى المترافقة :

أى مجموعة من القوى الغير مستوية يمكن إختزالها إلى قوتين احداهما تمر بنقطة معينة وتعمل فى اتجاه معين (أى أن خط عملها معلوم).

البرهان :

نفرض أن لدينا مجموعة من القوى تم إختزالها عند نقطة الأصل O إلى المحصلة $\underline{F}$ وازدواج عزمه $\underline{M}$ والمطلوب إختزال هذه المجموعة إلى قوتين $\underline{F}_1$ ، $\underline{F}_2$ بحيث $\underline{F}_1$ تؤثر فى النقطة $P_1(x_1, y_1, z_1)$ وتوازي متجه الوحدة $\underline{e}_1 = \underline{li} + \underline{j} + \underline{nk}$ والمطلوب إيجاد القوة الأولى $\underline{F}_1$ ومتجه القوة الثانية $\underline{F}_2$ ومعادلة خط عملها.

بإختزال المجموعة عند النقطة المعلومة $P_1(x_1, y_1, z_1)$ إلى المحصلة $\underline{F}$ وازدواج عزمه $\underline{M}'$ حيث

$$\underline{M}' = \underline{M} - \underline{r}_1 \wedge \underline{F}$$

حيث $\underline{r}_1$ متجه موضع النقطة المعلومة P_1 أى

$$\underline{r}_1 = x_1 \underline{i} + y_1 \underline{j} + z_1 \underline{k}$$

نفرض أن S مستوى الخمود عند النقطة P_1 وأنه يتقاطع مع المستوى الذي يضم القوة

$\vec{F}$ والاتجاه $\hat{e}_1$ في الخط P_1P' فيكون هذا الخط عمودى على $\underline{M'}$.

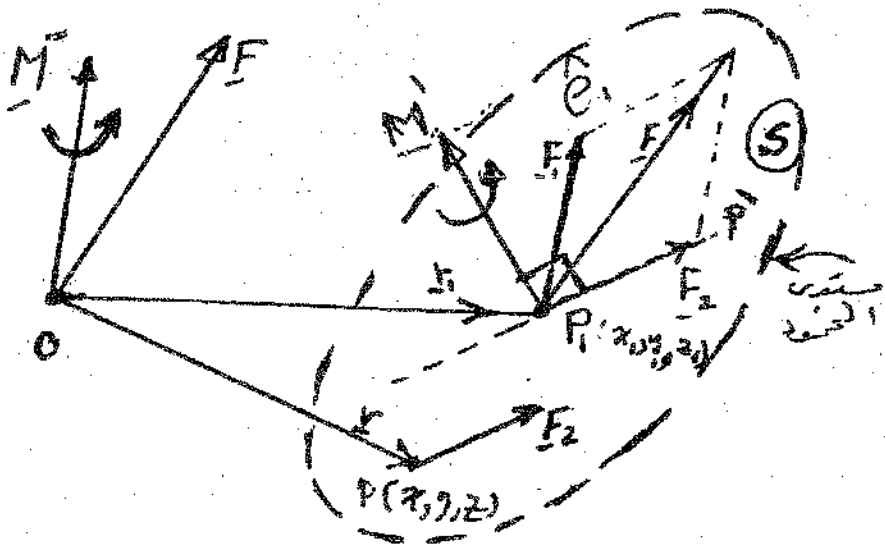
نقوم بتحليل القوة $\underline{F}$ عند P_1 إلى قوتين احدها في اتجاه $\hat{e}_1$ ولتكن $\underline{F}_1$ والثانية $\underline{F}_2$

تقع في مستوى الخمود S وتعمل في الاتجاه $\overline{P_1P'}$ كما في الشكل. وعلى ذلك فإن

المجموعة عند P_1 تكافئ القوتين $\underline{F}_1, \underline{F}_2$ بالإضافة إلى الازدواج $\underline{M'}$ المتعامد على

$\underline{F}_2$ أى أن

$$\underline{F}_2 \cdot \underline{M'} = 0$$



أى أنه يمكن اختزال $\underline{F}_2$ عند $\underline{M'}$ عند P_1 إلى قوة وحيدة $\underline{F}_2$. وعليه فإن مجموعة

القوى تكافئ $\underline{F}_1$ عند P_1 بالإضافة إلى $\underline{F}_2$ (لا تؤثر عند P_1) والمطلوب إيجاد خط

عملها كما يلى:

نفرض أن مجموعة القوى هي $\underline{F}$ ، $\underline{M}$ عند O تكافئ القوتين $\underline{F}_1$ ، $\underline{F}_2$ حيث

$$\underline{F}_1 = F_1 \hat{e}_1 \quad (37-2)$$

$$\underline{F}_2 = \underline{F} - F_1 \hat{e}_1 \quad (38-2)$$

ويكون خط عمل القوة $\underline{F}_1$ معلوما وعلى الصورة:

$$\frac{x-x_1}{\ell} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$$

وإذا نقلنا المجموعة $\underline{F}$ ، $\underline{M}$ عند نقطة الأصل إلى نقطة التأثير $P_1(x_1, y_1, z_1)$ فتصبح

المجموعة تكافئ $\underline{F}$ ، $\underline{M}'$ حيث عزم الازدواج الجديد $\underline{M}'$ هو

$$\underline{M}' = \underline{M} - r_1 \wedge \underline{F} \quad (39-2)$$

ولإختزال القوة $\underline{F}_2$ عند P_1 والازدواج $\underline{M}'$ إلى قوة وحيدة $\underline{F}_2$ يتحقق الشرط

$$\underline{F}_2 \cdot \underline{M}' = 0 \quad (40-2)$$

وبالتعويض عن $\underline{F}_2 = \underline{F} - \underline{F}_1$ نحصل على $\underline{F}_1 \cdot \underline{M}' = \underline{F} \cdot \underline{M}'$ ومنها

$$F_1 = \frac{\underline{F} \cdot \underline{M}'}{\hat{e}_1 \cdot \underline{M}'} \quad (41-2)$$

ومنها نكون قد حصلنا مقدار F_1 ومنها نحصل على $\underline{F}_1 = F_1 \hat{e}_1$ والثانية نحصل عليها

من $\underline{F}_2 = \underline{F} - \underline{F}_1$ وعلى ذلك نكون قد تمكنا من تحديد القوتين $\underline{F}_1$ ، $\underline{F}$ في الصورة الاتجاهية.

ولدينا خط عمل القوة $\underline{F}_1$ من المعطيات والمطلوب إيجاد خط عمل القوة $\underline{F}_2$ ويلاحظ

أن $\underline{F}_2$ واقعة في مستوى الخمود.

نفرض أن النقطة العامة $P(x, y, z)$ واقعة على خط عمل القوة $\underline{F}_2$ وبأخذ العزوم

حول نقطة الأصل (مع ملاحظة ان عزم المجموعة $\underline{F}, \underline{M}$ عند نقطة الأصل يساوى عزم المجموعة $\underline{F}_1, \underline{F}_2$ حول أى نقطة لأن المجموعتان متكافئتان).

$$\therefore \underline{M} = \underline{r}_1 \wedge \underline{F}_1 + \underline{r} \wedge \underline{F}_2 \quad (42-2)$$

وهى معادلة خط عمل القوة $\underline{F}_2$ حيث $\underline{r} = (x, y, z)$.

ويسمى خط عمل القوة $\underline{F}_2$ (معادلته (2-45)) بالخط المرافق للقوة الأولى $\underline{F}_1$ ومعادلته الكارتيزية معرفة بالمعادلة (2-41) أما معادلته الاتجاهية هى

$$(\underline{r} - \underline{r}_1) \wedge \hat{e}_1 = 0 \quad (43-2)$$

حيث $\underline{r}_1$ متجه موضع النقطة المعلومة P_1 ، $\underline{r}$ متجه موضع أى نقطة عامة على خط عمل القوة $\underline{F}_1$ و $\hat{e}_1$ متجه الوحدة له.

مثال (١٣):

مجموعة من القوى تكافئ عند نقطة الأصل القوة $\underline{F} = f(6\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k})$

وازدواج عزمه $\underline{M} = f(-2\hat{i} - 5\hat{j} + 9\hat{k})$. يراد استبدالهما بقوتين مرافقتين بحيث

تعمل إحداهما فى الخط $2(x-1)=y+1=z$ ، أوجد الخط المرافق والقوتين.

الحل:

نفرض أن القوتين هما $\underline{F}_1, \underline{F}_2$ بحيث تؤثر القوة $\underline{F}_1$ عند النقطة $P_1(1, -1, 0)$ على الخط المعطى ومتجه الوحدة له

$$\hat{e}_1 = \frac{1}{3}(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}) \quad (1)$$

يمكن كتابة القوتين على الصورة:

$$\underline{F}_1 = F_1 \hat{e}_1 \quad (2)$$

$$\underline{F}_2 = \underline{F} - F_1 \hat{e}_1 \quad (3)$$

وباختزال المجموعة عند النقطة P_1 نحصل على ازدواج جديد عزمه

$$\underline{M}' = \underline{M} - \underline{r}_1 \wedge \underline{F}$$

وبالتعويض عن

$$\underline{r}_1 = \hat{i} - \hat{j}, \quad (4)$$

$$\therefore \underline{M}' = f(-2\hat{i} - 5\hat{j} + 9\hat{k}) - f \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 6 & -6 & 2 \end{vmatrix} = 3f(-\hat{j} + 3\hat{k}) \quad (5)$$

ولكى تختزل المجموعة $\underline{M}'$ ، $\underline{F}_2$ إلى قوة وحيدة $\underline{F}_2$ عند نقطة تأثير أخرى.

يتحقق الشرط $\underline{F}_2 \cdot \underline{M}' = 0$ ومن المعادلة (3) نحصل على

$$F_1 \hat{e}_1 \cdot \underline{M}' = \underline{F} \cdot \underline{M}' \quad (6)$$

بالتعويض من (1)، (4) في (6) نحصل على

$$F_1 f(-2 + 6) = 3f^2(6 + 6) \Rightarrow F_1 = 9f$$

وبالتعويض عن F_1 في (3)، (2) نحصل على

$$\left. \begin{aligned} \underline{F}_1 &= 3f(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}) \\ \underline{F}_2 &= f(3\hat{i} - 12\hat{j} - 4\hat{k}) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ولإيجاد معادلة خط عمل القوة $\underline{F}_2$ نحسب العزوم حول نقطة الأصل:

$$\underline{M} = \underline{r}_1 \wedge \underline{F}_1 + \underline{r} \wedge \underline{F}_2$$

$$\therefore f(-2\hat{i}-5\hat{j}+9\hat{k})=3f\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix}+f\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ 3 & -12 & -4\end{vmatrix}$$

$$=3f(-2\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k})+f[(-4y+12z)\hat{i}+(3z+4x)\hat{j}+(-12x-3y)\hat{k}]$$

ومنها نحصل على المعادلات القياسية لخط عمل القوة F_2 كما يلي:

$$-y+3z=1, \quad 3z+4x=1, \quad 4x+y=0 \quad (8)$$

ولكى نحصل على الصورة القانونية الكارتيزية للخط المستقيم نختار نقطة عليه

(x_0, y_0, z_0) ولايجادها نختار أى قيمة لواحد منهم ونعوض فى (8) لإيجاد الاثنين

الباقين. فإذا وضعنا $x_0=0$ وبالتعويض فى (8) نحصل على $z_0=1/3$ ، $y_0=0$ أما

النقطة $(0,0,1/3)$ تقع على خط عمل القوة F_2 التى نحسب الاتجاه لها من (7) وهى

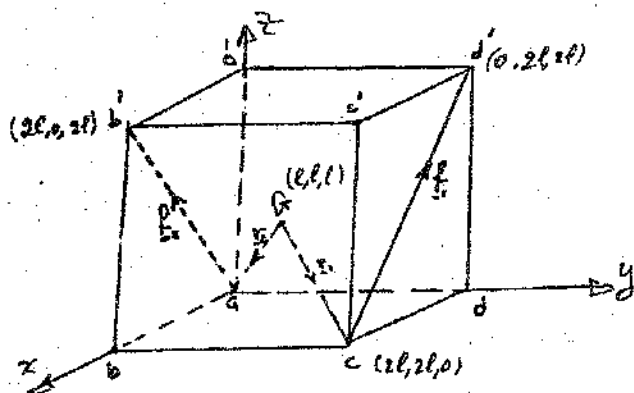
$(3, -12, -4)$. إذن معادلة الخط المرافق (خط عمل F_2) يأخذ الصورة

$$\frac{x-0}{3}=\frac{y-0}{-12}=\frac{z-1/3}{-4}$$

أمثلة محلولة على الباب الثاني

١- قوتان متساويتان مقدار كل منهما f تؤثران في قطرين متعامدين لوجهين متوازيين في مكعب طول ضلعه $2l$ أوجد القوة والازدواج المكافئ للمجموعة عند مركز المكعب.

الحل:



باختيار المحاور المتعامدة
كما بالشكل حيث a نقطة
أصل. تكون القوى في
الصور الاتجاهية

$$\therefore \underline{f}_1 = \frac{f}{\sqrt{2}}(-\hat{i} + \hat{k}) \longrightarrow c(2l, 2l, 0) \quad (1)$$

بالمثل

$$\underline{f}_2 = f \hat{f}_2 = f \frac{\overline{ab'}}{ab'} = \frac{f}{\sqrt{2}}(\hat{i} + \hat{k}) \longrightarrow a(0, 0, 0) \quad (2)$$

$$\underline{r}_1 = l(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}), \quad \underline{r}_2 = -l(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$$

باختزال القوتين $\underline{f}_1, \underline{f}_2$ عند النقطة $G_c(l, l, l)$ (مركز المكعب) إلى القوة المحصلة

$\underline{F}$ وازدواج عزمه $\underline{M}$.

$$\underline{F} = \underline{f}_1 + \underline{f}_2 = \frac{2f}{\sqrt{2}} \hat{k} \quad (3)$$

$$\underline{M} = \underline{r}_1 \wedge \underline{f}_1 + \underline{r}_2 \wedge \underline{f}_2$$

$$= \frac{\ell f}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \frac{\ell f}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{2f}{\sqrt{2}} \ell \hat{k} \quad (4)$$

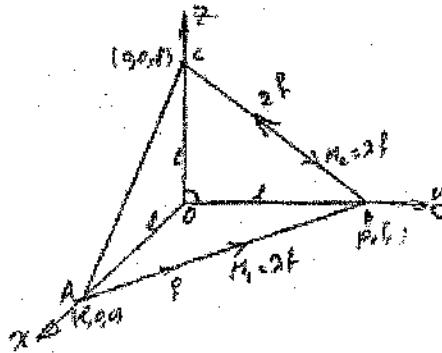
من (3)، (4) يتضح أن المجموعة تكافئ عند مركز المكعب G القوة $F = \sqrt{2} f$ وازدواج عزمه $F\ell$ ويعمل حول نفس خط عمل المحصلة.

ملحوظة : اثبت ان المجموعة السابقة تكافئ لولبية. أوجد درجتها ومعادلة محورها.

٢- OA, OB, OC ثلاث أحرف متساوية ومتعامدة في الهرم $OABC$ طول كل منهم ℓ وأثرت القوتين $f, 2f$ في الحرفين $\overline{AB}, \overline{BC}$ على الترتيب. كما اثر ازدواجين كل منهما λf حول الحرفين $\overline{AB}, \overline{CB}$ أوجد درجة اللولبية المكافئة ثم أوجد معادلة المحور عندما $\lambda = 2\ell$

الحل :

من هندسة الشكل يمكن كتابة المجموعة المؤثرة على الصورة الاتجاهية الآتية :



$$\underline{f}_1 = \frac{f}{\sqrt{2}}(-\hat{i} + \hat{j})$$

$$\underline{f}_2 = \frac{2f}{\sqrt{2}}(-\hat{j} + \hat{k})$$

وتؤثران في النقطة $B(0, \ell, 0)$ بالإضافة إلى الإزدواجين :

$$\underline{M}_1 = \frac{\lambda f}{\sqrt{2}}(-\hat{i} + \hat{j}), \quad \underline{M}_2 = \frac{\lambda f}{\sqrt{2}}(\hat{j} - \hat{k})$$

وباختزال المجموعة عند نقطة الأصل O إلى القوة المحصلة $\underline{F}$ وازدواج عزمه $\underline{M}$ كما يلي:-

$$\underline{F} = \underline{f}_1 + \underline{f}_2 = \frac{f}{\sqrt{2}}(-\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) \quad (1)$$

$$\underline{M} = \underline{M}_1 + \underline{M}_2 + \underline{r}_1 \wedge \underline{f}_1 + \underline{r}_2 \wedge \underline{f}_2$$

$$\underline{r}_1 = \underline{r}_2 = \ell \hat{j} \quad \text{حيث}$$

$$\therefore \underline{M} = \frac{\lambda f}{\sqrt{2}}(-\hat{i} + \hat{j}) + \frac{\lambda f}{\sqrt{2}}(\hat{j} - \hat{k}) + \ell \hat{j} \wedge \frac{f}{\sqrt{2}}(-\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$$

$$= \frac{\lambda f}{\sqrt{2}}(-\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) + \frac{\ell f}{\sqrt{2}}(2\hat{i} + \hat{k})$$

$$\Rightarrow \underline{M} = \frac{f}{\sqrt{2}}[(2\ell - \lambda)\hat{i} + 2\lambda\hat{j} + (\ell - \lambda)\hat{k}] \quad (2)$$

$$\therefore \underline{F} \cdot \underline{M} = -\frac{3\lambda f^2}{2},$$

$$F^2 = 3f^2$$

وبالتالى فإن المجموعة تكافئ لولبية درجتها

$$P = \frac{\underline{F} \cdot \underline{M}}{F^2} = \frac{-1}{2} \lambda \quad (3)$$

ثانيا: عندما $\lambda = 2\ell$: بالتعويض فى (1), (2), (3)

$$\left. \begin{aligned} P &= -\ell \\ \underline{F} &= \frac{f}{\sqrt{2}}(-\underline{\hat{i}} - \underline{\hat{j}} + 2\underline{\hat{k}}) \\ \underline{M} &= \frac{f\ell}{\sqrt{2}}(4\underline{\hat{j}} - \underline{\hat{k}}) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ومعادلة محور اللولبية:

$$\underline{r} \wedge \underline{F} = \underline{M} - P \underline{F}$$

$$\therefore \frac{f}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \underline{\hat{i}} & \underline{\hat{j}} & \underline{\hat{k}} \\ x & y & z \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{f\ell}{\sqrt{2}}(4\underline{\hat{j}} - \underline{\hat{k}}) + \frac{f\ell}{\sqrt{2}}(-\underline{\hat{i}} - \underline{\hat{j}} + 2\underline{\hat{k}})$$

$$\Rightarrow (2y+z)\underline{\hat{i}} + (-z-2x)\underline{\hat{j}} + (-x+y)\underline{\hat{k}} = \ell(-\underline{\hat{i}} + 3\underline{\hat{j}} + \underline{\hat{k}})$$

ومنها نحصل على المعادلات الثلاثة:

$$2y+z=-\ell, \quad z+2x=-3\ell, \quad x-y=-\ell \quad (5)$$

ويمكن وضع معادلة المحور فى الصورة القانونية الكارتيزية كما يلى :-

توجد نقطة (x_0, y_0, z_0) على هذا المحور وذلك بوضع قيمة اختيارية لإحدهما وليكن

$$x_0 = -\ell, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = -\ell$$

وبالتالى تكون المعادلة على الصورة

$$\frac{x-x_0}{F_x} = \frac{y-y_0}{F_y} = \frac{z-z_0}{F_z} = \lambda$$

$$\Rightarrow \frac{x+\ell}{-1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+\ell}{2}$$

وهو المطلوب.

٣- أثرت القوة $\underline{f}_1 = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ عند النقطة $(1, 0, -1)$ والقوة $\underline{f}_2 = \hat{i} - 2\hat{k}$ عند

النقطة $(0, 2, 1)$. أثبت أن المجموعة تكافئ لولبية درجتها $P = \frac{-2}{3}$ وأوجد معادلة

محورها.

الحل:

أولا نختزل المجموعة عند نقطة الأصل إلى القوة المحصلة $\underline{F}$ وازدواج عزمه $\underline{M}$:

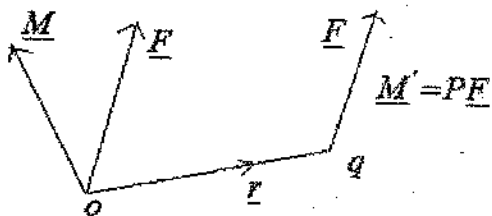
$$\underline{F} = \underline{f}_1 + \underline{f}_2 = 4\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$$

$$\underline{M} = \underline{r}_1 \wedge \underline{f}_1 + \underline{r}_2 \wedge \underline{f}_2$$

$$\therefore \underline{M} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -6\hat{i} - 3\hat{j} - 4\hat{k}$$

$\therefore$ المجموعة تكافئ لولبية درجتها:

$$P = \frac{\underline{F} \cdot \underline{M}}{F^2} = \frac{-2}{3}$$



لإيجاد معادلة محور اللولبية
بفرض النقطة العامة q على
محور اللولبية وبأخذ العزوم
حول P فإن

$$\underline{r} \wedge \underline{F} = \underline{M} - P\underline{F}$$

$$\therefore \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ 4 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -6\hat{i} - 3\hat{j} - 4\hat{k} + \frac{2}{3}(4\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k})$$

$$\Rightarrow (-y + 2z)\hat{i} + (4z + x)\hat{j} + (-2x - 4y)\hat{k} = -\frac{10}{3}\hat{i} - \frac{13}{3}\hat{j} - \frac{14}{3}\hat{k}$$

وبالمقارنة نحصل على المعادلات الثلاثة :

$$-y + 2z = -10/3, \quad 4z + x = -13/3, \quad x + 2y = 7/3$$

وأى معادلتين من الثلاثة السابقة تمثل معادلة المحور ويمكن وصفها على الصورة
القانونية الكارتيزية.

$$\frac{x - x_0}{F_x} = \frac{y - y_0}{F_y} = \frac{z - z_0}{F_z}$$

باختيار $z_0 = 0$ نحصل على $y_0 = 10/3$, $x_0 = -13/3$ يكون

$$\frac{x + 13/3}{4} = \frac{y - 10/3}{-2} = \frac{z}{-1}$$

٤ - مجموعة من القوى تكافئ عند نقطة الأصل قوة $\underline{F} = f(\hat{i} + \hat{k})$ وازدواج عزمه

$\underline{M}=3f(\underline{\hat{i}}-\underline{\hat{j}})$ يراد استبدالها بقوتين $\underline{F}_1, \underline{F}_2$ بحيث تعمل في الخط المستقيم

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1} \text{ أوجد القوتين.}$$

الحل:

من معادلة خط عمل القوة الأولى $\underline{F}_1$ نختار نقطة التأثير لها $P_1(0,0,1)$ ومتجه

الوحدة $\underline{\hat{e}}_1$ في اتجاه هذا الخط حيث

$$\underline{\hat{e}}_1 = \frac{1}{3}(2\underline{\hat{i}} + 2\underline{\hat{j}} + \underline{\hat{k}}), \quad \underline{F}_1 = F_1 \underline{\hat{e}}_1 \quad (1)$$

وننقل المجموعة أولا إلى النقطة P_1 يكون عزم الازدواج الجديد هو $\underline{M}'$ حيث

$$\underline{M}' = \underline{M} - \underline{r}_1 \wedge \underline{F}$$

$$= \underline{M} - f \begin{vmatrix} \underline{\hat{i}} & \underline{\hat{j}} & \underline{\hat{k}} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3f(\underline{\hat{i}} - \underline{\hat{j}}) - f\underline{\hat{j}} = f(3\underline{\hat{i}} - 4\underline{\hat{j}}) \quad (2)$$

$$\therefore \underline{F} = f(\underline{\hat{i}} + \underline{\hat{k}}) \quad (3)$$

ونشترط الآن أن المجموعة $\underline{F}_2, \underline{M}'$ تؤول إلى قوة وحيدة $\underline{F}_2$ وبذلك ينتج أن

$$\underline{F}_2 \cdot \underline{M}' = 0 \quad \Rightarrow \quad (\underline{F} - F_1 \underline{\hat{e}}_1) \cdot \underline{M}' = 0$$

باستخدام المعادلات (1), (2), (3) في المعادلة الأخيرة نحصل على $F_1 = -\frac{9}{2}f$

ومن المعادلة (1) يكون

$$\underline{F}_1 = -\frac{3f}{2}(2\underline{\hat{i}} + 2\underline{\hat{j}} + \underline{\hat{k}}) \quad (4)$$

$$\therefore \underline{F}_2 = \underline{F} - \underline{F}_1 = f \left(4\underline{\hat{i}} + 3\underline{\hat{j}} + \frac{5}{2}\underline{\hat{k}} \right) \quad (5)$$

وبالنسبة لخط عمل هذه القوة $\underline{F}_2$ فيكون له المعادلة الاتجاهية

$$\underline{M} = \underline{r}_1 \wedge \underline{F}_1 + \underline{r} \wedge \underline{F}_2$$

$$= -\frac{3}{2}f \begin{vmatrix} \underline{\hat{i}} & \underline{\hat{j}} & \underline{\hat{k}} \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} + f \begin{vmatrix} \underline{\hat{i}} & \underline{\hat{j}} & \underline{\hat{k}} \\ x & y & z \\ 4 & 3 & 5/2 \end{vmatrix}$$

$$\therefore 3f(\underline{\hat{i}} - \underline{\hat{j}}) = -\frac{3}{2}f(-2\underline{\hat{i}} + 2\underline{\hat{j}}) + f[(\frac{5}{2}y - 3z)\underline{\hat{i}} + (4z - \frac{5}{2}x)\underline{\hat{j}} + (3x - 4y)\underline{\hat{k}}]$$

ومنها نحصل على

$$\left(\frac{5}{2}y - 3z\right)\underline{\hat{i}} + \left(4z - \frac{5}{2}x\right)\underline{\hat{j}} + (3x - 4y)\underline{\hat{k}} = 0$$

وبذلك تكون المعادلات القياسية على الصورة:

$$5y - 6z = 0, \quad 8z - 5x = 0, \quad 3x - 4y = 0 \quad (6)$$

واضح أن عمل القوة $\underline{F}_2$ يمر بنقطة الأصل $(0, 0, 0)$ ويمكن كتابتها على الصورة:

$$\frac{x}{8} = \frac{y}{6} = \frac{z}{5} \quad (6)'$$

٥- مجموعة من القوى تؤول إلى القوة $\underline{F} = f(\underline{\hat{i}} + 4\underline{\hat{j}} - \underline{\hat{k}})$ عند نقطة الأصل وازدواج

عزمه $\underline{M} = f(-5\underline{\hat{i}} + 6\underline{\hat{j}} + 7\underline{\hat{k}})$ اثبت أن هذه المجموعة تكافئ قوتين متساويتين كل

منها $3f$ وتعملان في الخطين المستقيمين التاليين:

$$L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1},$$

$$L_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{2}$$

الحل:

نفرض أن القوتين هما $\underline{F}_1, \underline{F}_2$ بحيث تعمل $\underline{F}_1$ مع الخط المستقيم L_1 وعلى ذلك نأخذ نقطة التأثير لها $P_1(1, -1, 2)$ ومتمجه الوحدة على امتدادها هو

$\hat{e}_1 = \frac{1}{3}(2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})$. ثم نوجد القوة المرافقة $\underline{F}_2$ وخط عملها ونبين أن كل من

القوتين تساوى $3f$ وأن الخط المستقيم L_2 هو الخط المرافق للمستقيم L_1 ننقل أولا

المجموعة للنقطة P_1 حيث نجد الأزواج الجديد $\underline{M}'$ على الصورة

$$\underline{M}' = \underline{M} - r_1 \wedge \underline{F}$$

$$= f(-5\hat{i} + 6\hat{j} + 7\hat{k}) - f \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= f(2\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k})$$

وعند نقطة التأثير نقسم المحصلة $\underline{F}$ إلى القوتين حيث تكون

$$\underline{F}_1 = F_1 \hat{e}_1 = \frac{1}{3} F_1 (2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}),$$

$$\underline{F}_2 = \underline{F} - \underline{F}_1 = \underline{F} - F_1 \hat{e}_1$$

ومن الشرط أن $\underline{F}_2, \underline{M}'$ عند النقطة P_1 تؤول إلى قوة وحيدة $\underline{F}_2$ عند نقطة تأثير

أخرى يجب أن يكون لدينا $\underline{F}_2 \cdot \underline{M}' = 0$ أى أن

$$F_1 \hat{e}_1 \cdot \underline{M}' = \underline{F} \cdot \underline{M}'$$

$$F_1 \frac{f}{3}(4+6+2) = f^2(2+12-2)$$

$$\therefore F_1 = 3f \Rightarrow \underline{F}_1 = f(2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}),$$

$$\underline{F}_2 = f(\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}) - f(2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) = f(-\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})$$

$$\therefore F_2 = |\underline{F}_2| = 3f = F_1$$

وهو المطلوب أولاً.

وبالنسبة لخط عمل القوة الثانية $\underline{F}_2$ فتكون المعادلة الاتجاهية

$$\underline{M} = \underline{r}_1 \wedge \underline{F}_1 + \underline{r} \wedge \underline{F}_2$$

$$\therefore f(-5\hat{i} + 6\hat{j} + 7\hat{k}) = f \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} + f \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= f(-5\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) + f[(-2y - 2z)\hat{i} + (-z + 2x)\hat{j} + (2x + y)\hat{k}]$$

وبذلك تنتج المعادلات القياسية لخط عمل القوة $\underline{F}_2$ على الصورة

$$y + z = 0, \quad -z + 2x = 3, \quad 2x + y = 3$$

ولكى نضع هذه المعادلة على الصورة L_2 نوجد نقطة عليه مثل $z_0 = 1$ فنحصل على

$$x_0 = 2, \quad y_0 = -1$$

$$\therefore \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{2}$$

٦- مجموعة من القوى مكونة من القوتين $\underline{f}_1 = \underline{\hat{i}} + \underline{\hat{j}} + \underline{\hat{k}}$ وتؤثر في نقطة الأصل

$$\text{والأخرى مقدارها } f_2 = 3 \text{ وخط عملها المستقيم } \frac{x-1}{2} = y-2 = \frac{z-3}{2}$$

أ. اثبت أن هذه المجموعة تكافئ لولبية أوجد درجتها.

ب. استبدل المجموعة إلى قوتين مترافقتين إحداها منطقية على المحور x .

ج. إذا أضفنا القوة $\underline{f}_3 = -\underline{\hat{i}} + 2\underline{\hat{j}} + 3\underline{\hat{k}}$ عند نقطة الأصل إلى تلك المجموعة. اثبت

أن المجموعة الجديدة تكافئ قوة وحيدة وأوجد معادلتها.

د. أوجد القوة F' والازدواج $\underline{M}'$ اللازم إضافتهما عند النقطة $P_1(0,0,1)$ حتى

تصبح المجموعة الأصلية متزنة.

الحل :

مجموعة القوى هي:

$$\left. \begin{array}{ll} \underline{f}_1 = \underline{\hat{i}} + \underline{\hat{j}} + \underline{\hat{k}} & \longrightarrow (0,0,0) \\ \underline{f}_2 = 2\underline{\hat{i}} + \underline{\hat{j}} + 2\underline{\hat{k}} & \longrightarrow (1,2,3) \end{array} \right\} \quad (1)$$

باختزال المجموعة عند نقطة الأصل إلى قوة محصلة $\underline{F}$ وازدواج عزمه $\underline{M}$:

$$\underline{F} = \underline{f}_1 + \underline{f}_2 = 3\underline{\hat{i}} + 2\underline{\hat{j}} + 3\underline{\hat{k}} \quad (2)$$

$$\underline{M} = \underline{r}_1 \wedge \underline{f}_1 + \underline{r}_2 \wedge \underline{f}_2$$

$$= \underline{0} + \begin{vmatrix} \underline{\hat{i}} & \underline{\hat{j}} & \underline{\hat{k}} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \underline{\hat{i}} + 4\underline{\hat{j}} - 3\underline{\hat{k}} \quad (3)$$

$$\therefore \underline{F} \cdot \underline{M} = 3 + 8 - 9 = 2, \quad F^2 = 9 + 4 + 9 = 22$$

∴ المجموعة تكافئ لولبية درجتها

$$P = \frac{\underline{F} \cdot \underline{M}}{F^2} = \frac{1}{11} \quad (4)$$

ب- سبق أن أثبتنا أن المجموعة تكافئ قوة $\underline{F}$ بالإضافة إلى ازدواج عزمه $\underline{M}$ كما في (2)، (3) القوتين المؤثرتين هما

$$\underline{E}_1 = F_1 \hat{i}, \quad \underline{E}_2 = \underline{F} - F_1 \hat{i} \quad (5)$$

القوة الأولى تمر بنقطة الأصل ∴ تختزل الازدواج $\underline{M}$ ، $\underline{E}_2$ إلى قوة وحيدة $\underline{F}_2$ تؤثر في نقطة مختلفة

$$\underline{E}_2 \cdot \underline{M} = 0$$

$$\therefore (\underline{F} - F_1 \hat{i}) \cdot \underline{M} = 0$$

$$\Rightarrow F_1 \hat{i} \cdot \underline{M} = \underline{F} \cdot \underline{M}$$

باستخدام (3)، (2) نجد أن $F_1 = 2$ وبالتعويض في (5)

$$\therefore \underline{E}_1 = 2 \hat{i} \quad (6),$$

$$\underline{E}_2 = \hat{i} + 2 \hat{j} + 3 \hat{k} \quad (7)$$

ولإيجاد معادلة خط عمل القوة $\underline{E}_2$ نفرض نقطة عامة (x, y, z) على خط عملها

$$\therefore \underline{M} = \underline{r}_1 \wedge \underline{E}_1 + \underline{r} \wedge \underline{E}_2,$$

وحيث أن القوة الأولى مارة بنقطة الأصل أي $\underline{r}_1 = \underline{0}$

∴ معادلة خط عمل القوة الثانية يأخذ الصورة:

$$\underline{r} \wedge \underline{E}_2 = \underline{M}$$

$$\therefore \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k}$$

$$\Rightarrow (3y - 2z)\hat{i} + (z - 3x)\hat{j} + (2x - y)\hat{k} = \hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k}$$

نتج المعادلات القياسية:

$$3y - 2z = 1, \quad z - 3x = 4, \quad 2x - y = -3 \quad (8)$$

أى معادلتين من (8) تمثلان معادلة خط عمل القوة $\underline{F}_2$. ولوضعها في الصورة

$$\frac{x - x_0}{F_{2x}} = \frac{z - z_0}{F_{2y}} = \frac{z - z_0}{F_{2z}}$$

نختار $x_0 = 0$ ومن (8) نحصل على $z_0 = 4$, $y_0 = 3$

∴ الصورة القياسية القانونية لخط عمل القوة $\underline{F}_2$ هي

$$\frac{x}{1} = \frac{y - 3}{2} = \frac{z - 4}{3}$$

جـ عند إضافة القوة $\underline{f}_3$ إلى المجموعة عند نقطة الأصل

$$\underline{f}_3 = -\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} \longrightarrow (0, 0, 0)$$

وباختزال المجموعة الجديدة عند نقطة الأصل:

$$\underline{F} = \underline{f}_1 + \underline{f}_2 + \underline{f}_3 = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k} \quad (9)$$

$$\underline{M} = \underline{r}_1 \wedge \underline{f}_1 + \underline{r}_2 \wedge \underline{f}_2 + \underline{r}_2 \wedge \underline{f}_3 = \underline{0} + \underline{r}_2 \wedge \underline{f}_2 + \underline{0}$$

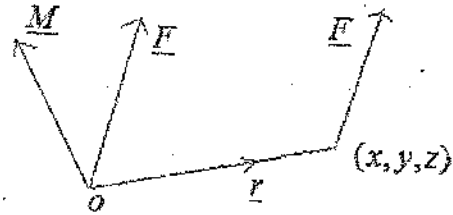
$$\therefore \underline{M} = \hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k} \quad (10)$$

$$\underline{F} \cdot \underline{M} = 2 + 16 - 18 = 0$$

∴ المجموعة تكافئ قوة وحيدة في المعادلة (9) ولإيجاد معادلة خط عملها هو:

$$\underline{M} = \underline{r} \wedge \underline{F}$$

$$\therefore \hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$



$$= (6y - 4z)\hat{i} + (2z - 6x)\hat{j} + (4x - 2y)\hat{k}$$

$$\therefore 6y - 4z = 1, \quad 2z - 6x = 4, \quad 4x - 2y = -3 \quad (11)$$

باختيار $x_0 = 0$ نحصل على $y_0 = 3/2, \quad z_0 = 2$

وبالتالي فإن معادلة خط عمل القوة الوحيدة هي

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-3/2}{2} = \frac{z-2}{3}$$

د- نعلم أن المجموعة تكافئ عند نقطة الأصل:

$$\underline{F} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}, \quad \underline{M} = \hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k}$$

بنقل المجموعة إلى النقطة $P_1(0,0,1)$ إلى المحصلة $\underline{F}$ بالإضافة ازدواج عزمه $\underline{M}_1$

حيث

$$\underline{M}_1 = \underline{M} - \underline{r}_1 \wedge \underline{F}, \quad \underline{r}_1 = \underline{k}$$

$$\therefore \underline{M}_1 = \hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k} - \underline{k} \wedge (3\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) = 3\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$$

ولكى يحدث الاتزان يجب أن يكون

$$\underline{F} + \underline{F}' = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad \underline{F}' = -\underline{F} = -3\underline{\hat{i}} - 2\underline{\hat{j}} - 3\underline{\hat{k}}$$

$$\underline{M}_1 + \underline{M}' = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad \underline{M}' = -\underline{M}_1 = -3\underline{\hat{i}} - \underline{\hat{j}} + 3\underline{\hat{k}}$$

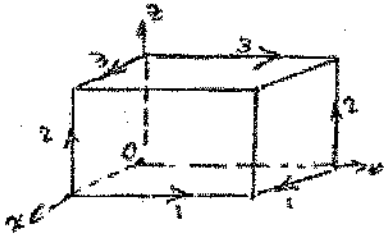
تمارين

١- ثلاثة قوى متساوية كل منها f تؤثر في النقط $A(1,0,0)$ ، $B(0,2,0)$ ، $C(0,0,3)$ وبحيث تكون اتجاهاتها على الترتيب ox, oz, oy اثبت أن المجموعة تكافئ لولبية ثم أوجد درجتها ومعادلة محورها.

٢- $OABCO'A'B'C'$ مكعب طول ضلعه a وفيه $OO', AA', \dots$ احرف. اثرت ثلاث قوى متساوية في اتجاه الأضلاع $OA, BB', O'C'$ أوجد خطوة اللولبية.

٣- قوتان متساويتان مقدار كل منها f تؤثران في قطرين متعامدين لوجهين متوازيين في مكعب طول ضلعه 2ℓ أوجد ما تؤول إليه المجموعة.

٤- قوتان $\underline{f}_1 = 2\underline{i} + 2\underline{j} - \underline{k}$ ، $\underline{f}_2 = 2\underline{i} - 3\underline{k}$ تؤثران عند النقطتين $(2, -2, 1)$ ، $(2, 2, 3)$ على الترتيب. أوجد ما تؤول إليه المجموعة عند النقطة $(1, 1, -1)$.



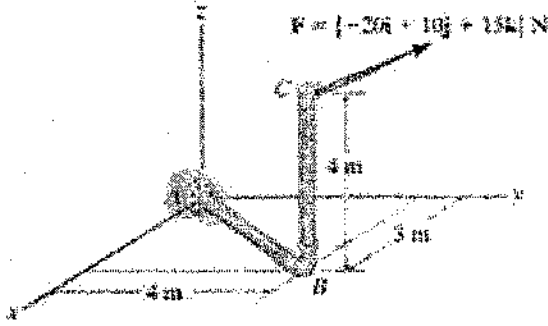
٥ - مكعب طول ضلعه ℓ تؤثر فيه ستة قوى الموضحة مقاديرها واتجاهاتها في الرسم أوجد محصلة هذه القوى وعزومها حول نقطة الأصل.

٦- اعتبر النقطتين $A(\sqrt{2}\ell, 0, 0)$ ، $B(0, \sqrt{2}\ell, 0)$ حيث أثرت قوة f وازدواج

$2\lambda f$ في اتجاه $\overline{AB}$ وكذلك أثرت قوة $2f$ وازدواج λf في اتجاه oz . أوجد ما تؤول إليه المجموعة عند النقطة O .

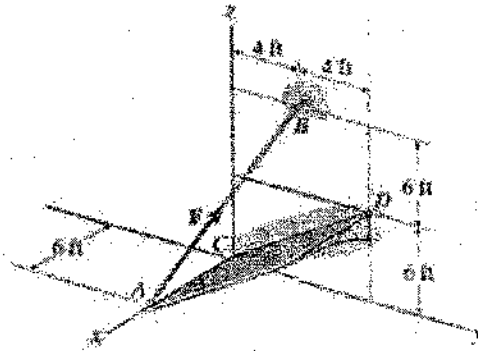
٧- إذا ثبت جسم وزنه 60 باوند عند النقطة $A(2, 3, 0)$ بواسطة ثلاثة خيوط AB, AC, AD والمثبت أطرافها الخالصة في النقط $B(6, 0, 0)$ ، $C(0, 7, 0)$ ، $D(0, 0, 6)$

أوجد الشدود في أجزاء الخيوط الثلاثة.



٨- أوجد عزم القوة F

المبينة بالشكل حول
المستقيم AB .



٩- إذا كانت قوة الشد في

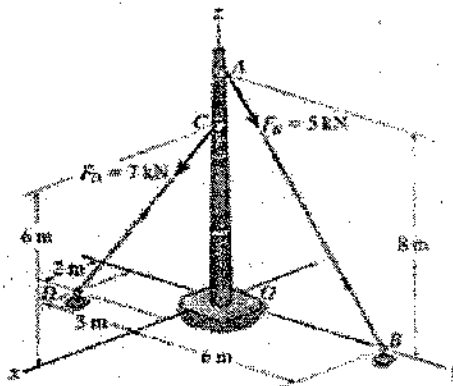
الساك والموضحة بالشكل

المقابل $F = 160 \text{ lb}$.

أوجد العزم حول المحور CD

١٠- أوجد مقدار القوة الموضحة في الشكل بالتمرين السابق واللازمة للحصول على

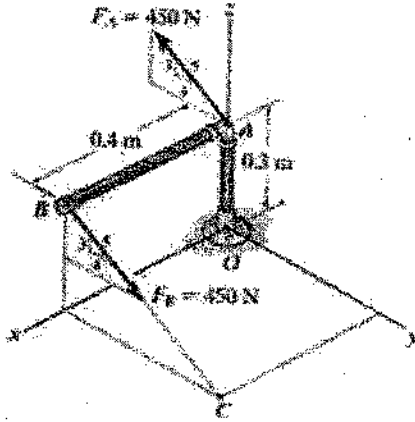
عزم حول المحور CD يساوى 500 lb.ft



١١- اختزل القوتين المؤثرتين على

الدعامة الموضحة بالشكل إلى قوة

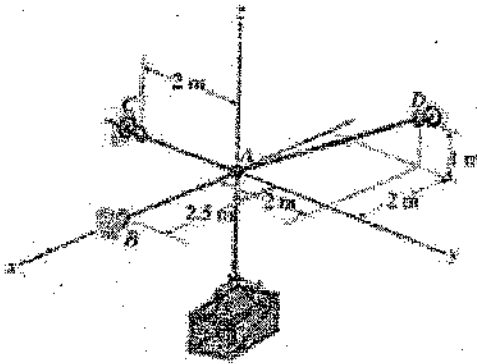
وازدواج عند النقطة O .



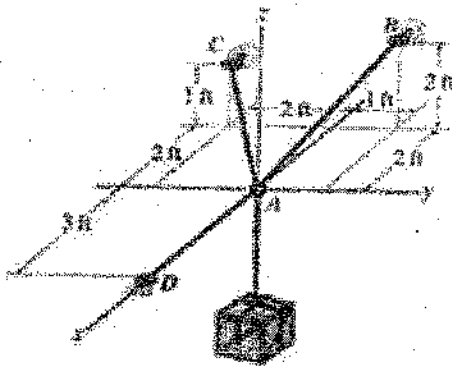
١٢- أوجد عزم الازدواج المؤثر على
الانبوب المركب بالشكل والنتائج
عن القوى المبينة.

١٣- إذا اتزن جسم تحت تأثير القوى $\underline{f}_1 = a\underline{i} + 2\underline{j} - b\underline{k}$,

والتي تؤثر في النقاط $\underline{f}_2 = 2\underline{i} + 2c\underline{j} - \underline{k}$, $\underline{f}_3 = \underline{i} + 2\underline{j} - d\underline{k}$ على الترتيب. أوجد مقدار كل من هذه القوى الثلاثة.



١٤- عين قوة الشد في كل سلك
واللازمة لتثبيت الصندوق الموضح
بالشكل علما بأن وزن الصندوق
يساوى 100 lb



١٥- عين قوة الشد في كل سلك
واللازمة لتثبيت الصندوق الموضح
بالشكل علما بأن وزن الصندوق
يساوى 300 lb

الباب الثالث

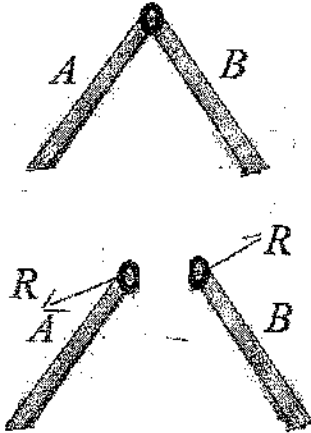
بعض التطبيقات على القوى المستوية

ردود الأفعال عند المفصلات

أولاً: ردود الأفعال عند المفصلات الملساء :

يمكن اعتبار المفصلة الملساء أنها عبارة عن مسمار اسطوانى أملس يدخل فى ثقوب اسطوانية ملساء فى الأجسام بحيث يدور كل جسم من الأجسام حول المسمار بحرية دون أى احتكاك بذلك يؤول رد فعل المسمار على أى جسم من الأجسام المتصلة ببعضها بالمفصلة إلى قوة واحدة تمر بمركز المسمار (المفصل).

وإذا اتصل بالمفصلة الملساء قضيبان فقط B, A يكون تأثير المفصلة على القضيبين عبارة عن قوتين متساويتين فى المقدار ومتضادتين فى الاتجاه وذلك لكون المفصل متزن.



ولذلك عند تحديد قيمة واتجاه رد الفعل عند المفصل يمكن فصل القضيبين بوضع قوى متساوية متضادة عند كل من القضيبين المنفصلين وتطبيق شروط الاتزان على كل قضيب على حده. ويمكن تحليل رد الفعل R عند المفصلة للقضيب A إلى مركبتين متعامدتين

وبالمثل يمكن تحليل رد الفعل عند المفصل للقضيب B إلى مركبتين متعامدتين ولكن فى

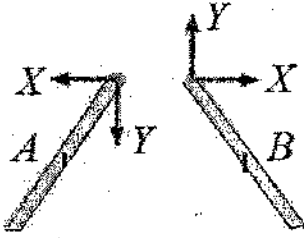
اتجاه عكس السابقة وبذلك يتحقق الاتزان حول المفصل.

وعند حل المسائل المكونة من هياكل

قضبان متصلة بمفصلات ملساء فإنه إذا

كان المفصل يمر بمحور تماثل فإن

ردود الأفعال عند هذا المفصل تكون



عمودية على محور التماثل (كما سنرى في حل التمارين)

ملحوظة: بالنسبة للمفاصل الخشنة فإنه بالإضافة إلى

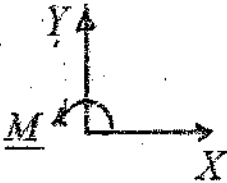
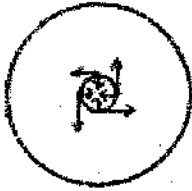
المجموعة السابقة من ردود الأفعال المارة بمركز المفصل

هناك القوى الناشئة من الاحتكاك وهذه القوى مماسية

لسطوح التلامس وعلى ذلك فإن مجموعة ردود الأفعال

وقوى الاحتكاك جميعها تكافئ قوة عند مركز المسمار

(المفصل) وازدواج كما بالشكل.



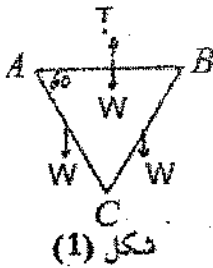
مثال (1):

تتصل ثلاث قضبان متساوية في الطول (2ℓ) والوزن (W) اتصالاً مفصلياً أملس

لتكون مثلث متساوي الأضلاع. وإذا علقت المجموعة من منتصف أحد قضبانها فأوجد

رد الفعل عند كل من المفاصل الثلاثة.

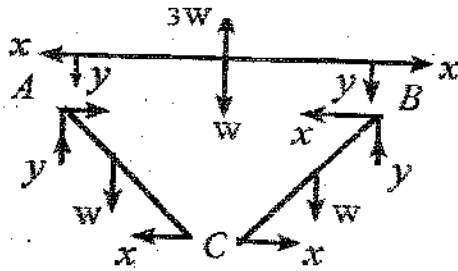
الحل:



أولاً من اتزان المجموعة في الشكل المقابل

$$T = 3W \quad \text{نحصل على}$$

ثانياً: يفصل القضبان عند المفصلات كما فى شكل التالى ومن التماثل يكون رد الفعل عن المفصل A ، B له المركبات x, y وكذلك يكون لرد الفعل عند المفصل C مركبة أفقية فقط x_1 .



يمكن الحصول مباشرة على النتائج عند رسم المسألة وكتابة البيانات والنتائج على الشكل مباشرة
(١) من اتزان القضيب AB :

مجموع المركبات الرأسية يساوى الصفر

$$\therefore 2y + w - 3w = 0 \Rightarrow y = w$$

(٢) اتزان القضيب AC :

من تلاشى المركبات الأفقية نجد أن $x = x_1$. لم يتبقى سوى إيجاد x وهذه نحصل

عليها بأخذ العزوم حول A للقوى المؤثرة على القضيب، A مثلاً:

$$-w \ell \sin 30^\circ - x 2 \ell \sin 60^\circ = 0$$

$$\therefore -\frac{1}{2}w - 2x \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow x = -\frac{w}{2\sqrt{3}}$$

وعلى ذلك فإن رد الفعل عند أى من المفصلين A ، B يساوى

$$R_A = R_B = \sqrt{w^2 + x^2} = \sqrt{w^2 + \frac{w^2}{12}} = \frac{w}{2} \sqrt{\frac{13}{3}}$$

ورد الفعل عند المفصل C هو $R_C = x = \frac{w}{2\sqrt{3}}$

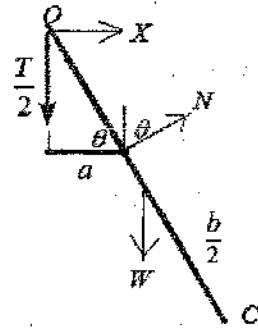
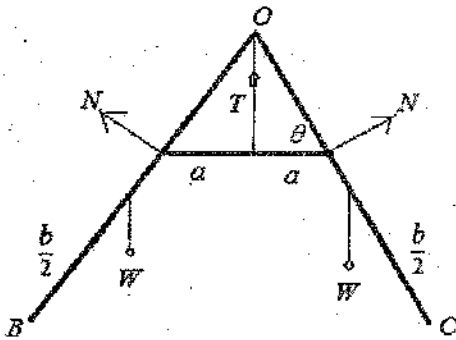
مثال (٢):

قضيبان منتظمان أملسان OB, OC وزن كل منهما w وطوله b . ربط القضيبان مفصليا في O ووضع تماثل على قضيب أفقى مثبت طوله $2a$ لتكون المجموعة على الحرف A . ربط أحد طرفي خيط خفيف في O وربط الطرف الآخر في منتصف القضيب الأفقى فإذا كان كل من OB, OC يصنع زاوية θ مع الأفقى. اثبت أن الشد في الخيط يساوى

$$w \left(\frac{b}{a} \cos^3 \theta - 2 \right)$$

الحل:

من تماثل القوى بالنسبة للمحور الرأسى المار بالمفصل O يكون لرد فعل المفصل على أى من القضيبين مركبة أفقية فقط (X)



اتزان القضيب OC : (مجموع المركبات الرأسية = صفر)

$$w + T/2 = N \cos \theta \quad (1)$$

العزوم للقضيب OC حول O يساوى صفر

$$w \frac{1}{2} b \cos \theta = N a \sec \theta$$

$$\Rightarrow N = \frac{b}{2a} w \cos^2 \theta \quad (2)$$

وبالتعويض في (1):

$$w + \frac{1}{2}T = \frac{1}{2}w \frac{b}{a} \cos^3 \theta$$

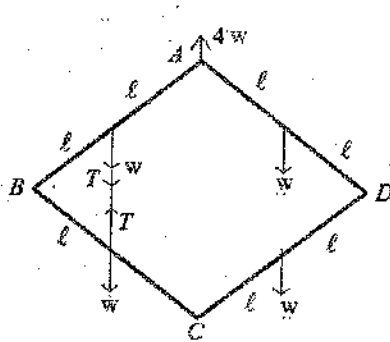
$$\Rightarrow T = w \left(\frac{b}{a} \cos^3 \theta - 2 \right)$$

وهو المطلوب

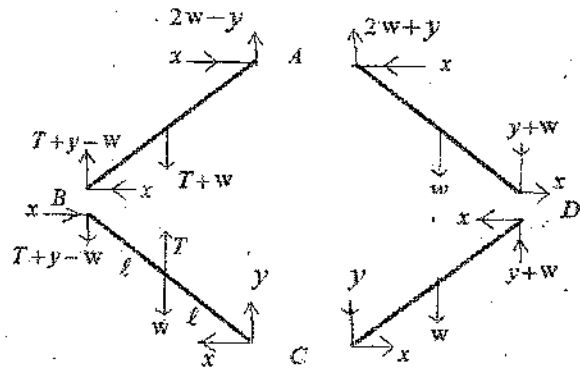
مثال (٣):

يتكون المربع $ABCD$ من أربعة قضبان منتظمة متصلة ببعضها اتصالاً مفصلياً سهلاً علقت المجموعة من نقطة A بينما يصل خيط خفيف بين منتصفى AB ، BC لحفظ الشكل مربعاً فإذا كان وزن كل قضيب w فاثبت أن الشد في الخيط يساوى $4w$ وأوجد رد الفعل عند كل من المفصلات B, C, D .

الحل:



شكل (١)



شكل (٢)

نفرض أن طول ضلع المربع هو $2l$. من اتزان الهيكل كله نجد أن قوة التعليق عند A تساوى $4w$ لأعلى كما بشكل (١). بفصل القضبان مع اعتبار أن رد الفعل عند C له

المركبتين x, y والأخذ في الاعتبار اتزان كل قضيب على حده (إنعدام المركبات الأفقية والرأسية) نحصل على توزيع القوى عند المفاصل كما بشكل (٢).

مجموع عزوم القوى المؤثرة على القضيب AB حول A يساوى الصفر

$$x(2\ell \sin 45^\circ) + (T + y - w)(2\ell \sin 45^\circ) = (T + w)\ell \sin 45^\circ$$

$$\therefore 2x + 2(T + y - w) = T + w$$

$$\Rightarrow 2x + 2y + T = 3w \quad (1)$$

مجموع عزوم القوى المؤثرة على القضيب BC حول B يساوى الصفر

$$2x + w = 2y + T \Rightarrow 2x - 2y - T = -w \quad (2)$$

بالمثل مجموع عزوم القوى المؤثرة على القضيب CD حول D يساوى الصفر

$$2x + 2y + w = 0 \Rightarrow 2x + 2y = -w \quad (3)$$

بجمع المعادلتين (1), (2) نحصل على

$$4x = 2w \Rightarrow x = \frac{w}{2} \quad (4)$$

ب طرح المعادلتين (1), (3) نحصل على

$$T = 4w \quad (5)$$

وبالتعويض عن x من (4) نحصل على y كما يلي:-

$$2y = -\frac{w}{2} - w \Rightarrow y = -\frac{3w}{2} \quad (6)$$

لإيجاد رد الفعل عند B :

المركبة الأفقية تساوى $x = \frac{w}{2}$ والمركبة الرأسية تساوى

$$T + y - w = 4w - \frac{3w}{2} - w = \frac{5w}{2}$$

$$\therefore R_B = \sqrt{(w/2)^2 + (2w)^2} = w\sqrt{17}/2$$

لإيجاد رد الفعل عند C :

المركبة الأفقية تساوى $x = \frac{w}{2}$ والمركبة الرأسية تساوى $y = -w$

$$\therefore R_C = \sqrt{\left(\frac{w}{2}\right)^2 + w^2} = \frac{w}{2}\sqrt{5}$$

لإيجاد رد الفعل عند D :

المركبة الأفقية تساوى $x = \frac{w}{2}$ والمركبة الرأسية تساوى $y + w = -w + w = 0$

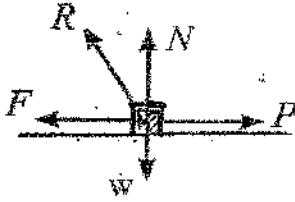
$$y + w = -w + w = 0$$

ويكون $R_D = \frac{w}{2}$ أفقياً.

ثانياً: الاحتكاك (Friction):

إذا وضع جسم على مستوى ما وأثرت على الجسم قوة فى المستوى فإن الجسم يقاوم الحركة وهذه المقاومة تسمى الاحتكاك وقوة الاحتكاك تكون فى عكس اتجاه احتمال الحركة وهى تزداد تدريجياً وتصل إلى نهايتها العظمى عندما يكون الجسم على وشك الحركة ويسمى عندئذ بالاحتكاك النهائى ويسمى هذا الوضع بوضع الاتزان النهائى أو الحرج والنسبة بين الاحتكاك النهائى ورد الفعل العمودى على السطح ثابت للجسمين. وتسمى هذه النسبة معامل الاحتكاك ويرمز له بالرمز (μ) ويتوقف مقدار معامل الاحتكاك بين جسمين على نوع مادة الجسمين ودرجة خشونة سطحيهما ولا يتوقف على شكل السطح أو مساحة السطح (بشرط عدم حدوث تداخل بين الجسمين) وعندما يبدأ الجسم الحركة تنقص قوة الاحتكاك قليلاً.

معامل الاحتكاك وزاوية الاحتكاك:



إذا وضع جسم وزنه w على نضد أفقى خشن كما بالشكل وكان الجسم على وشك الحركة تحت تأثير قوة P .

فإن قوة الاحتكاك F نهائية وبالتالي يكون معامل الاحتكاك $\mu = \frac{F}{N}$ حيث N رد

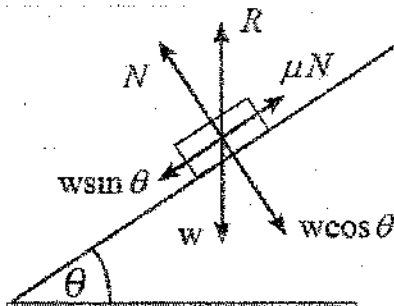
الفعل العمودى على السطح. أى أن قوة الاحتكاك النهائى تساوى μN .

ومحصلة رد الفعل العمودى وقوة الاحتكاك النهائى μN تسمى رد الفعل المحصل

(الكلى) R وهى تميل على العمودى على السطح (N) بزاوية λ فى عكس اتجاه

الحركة وتسمى زاوية الاحتكاك:

$$\therefore \tan \lambda = \frac{\mu N}{N} = \mu$$



ولتعيين زاوية الاحتكاك عمليا بين جسم

وسطح خشن وذلك بوضع الجسم

على السطح المستوى ثم تزداد

زاوية ميل المستوى على الأفقى

تدرجيا إلى الوضع الذى يصبح

الجسم فيه على وشك الانزلاق أسفل المستوى وعندئذ تكون زاوية ميل المستوى على

الأفقى θ مساوية لزاوية الاحتكاك.

البرهان:

معادلات الاتزان بتحليل القوى المؤثرة على الجسم فى اتجاه المستوى والعمودى

عليه:

$$\mu N = w \sin \theta$$

في اتجاه المستوى

$$N = w \cos \theta$$

في اتجاه عمودي على المستوى:

وبالقسمة نحصل على $\mu = \tan \theta$ وحيث أن $\mu = \tan \lambda$ فيكون $\lambda = \theta$

وطريقة معالجة مسائل الاحتكاك هي نفسها الطريقة التي اتبعت في دراسة استاتيكا الأجسام الملساء أى بكتابة معادلات الاتزان مع إضافة قوة الاحتكاك ، ويمكن تقسيم المسائل المحتوية على الاحتكاك إلى الأنواع الآتية:-

١. مسائل تحتوى على جسم واحد على وشك الانزلاق ويكون اتجاه احتمال حدوث الانزلاق معروفا وهنا نقوم بفرض قوة الاحتكاك μN في اتجاه عكس اتجاه القابلية للانزلاق.

٢. مسائل تحتوى على جسم يمكن أن يختل إترانه إما بالانزلاق أو بالانقلاب وهذا النوع يحتاج إلى معالجة خاصة عند دراسته.

٣. مسائل تحتوى على مجموعة من القضبان المتصلة مفصليا ومرتكزة ارتكازاً بسيطاً على مستوى خشن عند نقطتين. وفي هذا النوع ليس من الضروري أن يحدث انزلاق عند النقطتين في آن واحد ، أى أن قوة الاحتكاك من الممكن أن تكون نهائية عند نقطة بينما تكون غير نهائية عند النقطة الأخرى. لذلك يجب أن لا نفرض قوة الاحتكاك مساوية μN إلا إذا كنا متأكدين تماما بأن الانزلاق على وشك الحدوث.

٤. مسائل تحتوى على ما يسمى باحتكاك التدحرج.

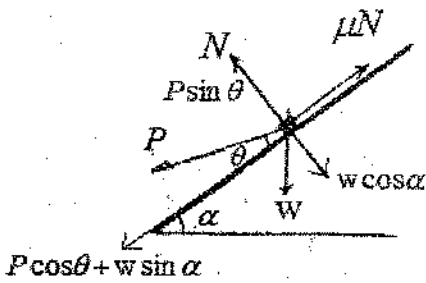
٥. مسائل تحتوى على احتكاك السيور والتخيوط مع المسطوح الأسطوانية.

وفيما يلي سنقوم بعرض أمثلة توضيحية للتعرف أكثر على بعض من أنواع من مسائل الاحتكاك.

أولاً: جسم موضوع على مستوى مائل خشن:

مما سبق نعلم أنه إذا وضع جسم على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية α وكان الجسم على وشك الانزلاق تحت تأثير وزنه فقط كانت زاوية ميل المستوى تساوى زاوية الاحتكاك أى أن $\alpha = \lambda$. والآن نقوم بدراسة اتزان الجسم فى حالة تأثير قوة مقدارها P وتميل على المستوى الخشن بالزاوية θ فى مستوى رأسى يمر بخط أكبر ميل للمستوى فى الحالتين:

أولاً: إذا كان قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى اصغر من قياس زاوية الاحتكاك ($\alpha < \lambda$) ، فإن الجسم يستقر على المستوى (حيث لا يكون الاحتكاك نهائياً). إذا أثرت قوة مقدارها P بحيث تجعل الجسم على وشك الانزلاق لأسفل (كما فى شكل (١)) أو على وشك الانزلاق لأعلى (كما فى شكل (٢)). فى هاتين الحالتين يصل الاحتكاك إلى الاحتكاك النهائى وتصبح قوة الاحتكاك مساوية للمقدار μN . حيث μ هو معامل الاحتكاك و N رد الفعل العمودى.



شكل (١)

وبدراسة الاتزان فى الحالة الأولى (حيث تؤثر قوة الاحتكاك لأعلى) نحصل على

$$P \cos \theta + W \sin \alpha = \mu N \quad (1)$$

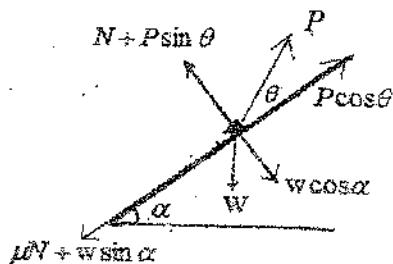
$$P \sin \theta + N = W \cos \alpha \quad (2)$$

بحل المعادلتين معاً نجد أن القوة التى

تكفى لكى تجعل الجسم على وشك الانزلاق لأسفل تساوى

$$P = W \frac{\sin(\lambda - \alpha)}{\cos(\theta - \lambda)}$$

وبدراسة الاتزان فى الحالة الثانية (حيث تؤثر قوة الاحتكاك لأسفل) نحصل على



شكل (٢)

$$P \cos \theta = w \sin \alpha + \mu N \quad (1)$$

$$P \sin \theta + N = w \cos \alpha \quad (2)$$

بحل المعادلتين معاً نجد أن القوة التى تكفى لكى تجعل الجسم على

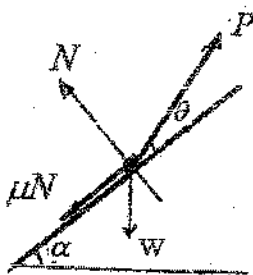
وشك الانزلاق لأعلى تساوى

$$P = w \frac{\sin(\lambda + \alpha)}{\cos(\theta - \lambda)}$$

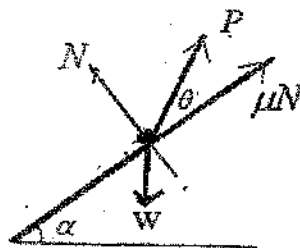
وفى كلا الحالتين تكون P أقل ما يمكن إذا كانت $\cos(\theta - \lambda) = 1$ ، أى أن $\theta = \lambda$. وأقل

قيمة هى $P = w \sin(\lambda + \alpha)$.

ثانياً : إذا كان قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى أكبر من قياس زاوية الاحتكاك $(\alpha > \lambda)$ ، فإن الجسم لا يمكن أن يتزن على المستوى.



شكل (٤)



شكل (٣)

ويمكن جعل الجسم فى حالة اتزان نهائى اى نصل إلى الاحتكاك نهائى بأن تؤثر على الجسم قوة مقدارها P لأعلى فى مستوى رأسى يمر بخط أكبر ميل بحيث تمنعه من الانزلاق لأسفل (شكل (٣)) أو تجعله على وشك الانزلاق لأعلى (شكل (٤)).

وعلى الطالب إيجاد القوة اللازمة لذلك.

ثانياً: الانزلاق والانقلاب

إذا كان هناك احتمال أن يختل توازن الجسم بواسطة انزلاق أو انقلاب فإن الانقلاب لا يحدث إلا إذا كان الاحتكاك كافياً لمنع الانزلاق ولحل مثل هذه المسائل نفرض أن الجسم سيفقد اتزانه بواسطة حدوث انقلاب حول نقطة ما وبالتالي فإن رد الفعل العمودي يؤثر عندها (هذه النقطة يمكن تحديدها بسهولة من طبيعة المسألة محل الدراسة). لتوضيح ذلك نعتبر المثال التالي :

صفحة مستوية على هيئة مستطيل عرضه $2a$ موضوعه بحيث كان مستواها رأسياً وعرضها ملامس لمستوى أفقى خشن أثرت قوة أفقية P تزداد تدريجياً على ارتفاع h من المستوى على المستطيل.

إذا لم تؤثر القوة P فإن المستطيل يتزق تحت تأثير وزنه w ورد الفعل العمودي N (شكل (1)). وعندما تبدأ القوة P فى التأثير تظهر قوة الاحتكاك F وتبدأ N فى الزحف نحو القوة P لكى يلتقى رد الفعل المحصل R مع نقطة التقاء P, w لكى يحدث اتزان وبارتداد P تزداد F وتقرب من μN بينما تزحف N أكثر وأكثر نحو النقطة O التى يمكن أن ينقلب حولها الجسم. فإذا وصلت قوة الاحتكاك F إلى μN قبل أن تصل N إلى الحافة O انزلقت الصفحة ، أما إذا وصلت N إلى النقطة O قبل أن تصل F إلى القيمة النهائية μN انقلبت الصفحة.

وأسهل الطرق لحل هذا النوع من المسائل:

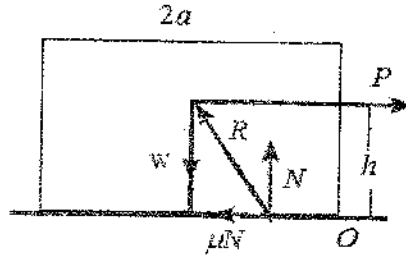
(i) نوجد القوة P_1 اللازمة لحدوث الانزلاق وذلك بتلاشى مجموع القوى الموازية للمستوى مع مراعاة أن قوة الاحتكاك نهائية (μN)

(ii) نوجد القوة P_2 اللازمة لحدوث الانقلاب وذلك بمساواة العزم حول O بالصفر.

بإيجاد القوة $p = p_1$ اللازمة لحدوث الانزلاق (من تلاشى القوى المؤثرة):

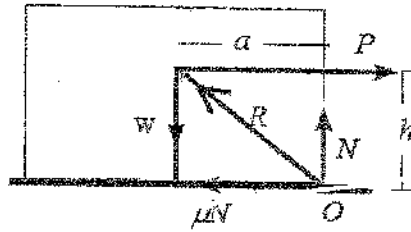
$$\therefore N = w$$

$$\therefore p_1 = \mu N = \mu w$$



وبإيجاد القوة اللازمة للانقلاب $p = p_2$ بأخذ العزوم حول O في الشكل المقابل

$$\therefore p_2 h = w a \Rightarrow p_2 = w \frac{a}{h}$$



لكي يحدث الانقلاب أولاً : إذا كان $p_2 < p_1$

$$w \frac{a}{h} < \mu w \Rightarrow \mu > \frac{a}{h}$$

لكي يحدث الانزلاق أولاً : إذا كان $p_1 < p_2$

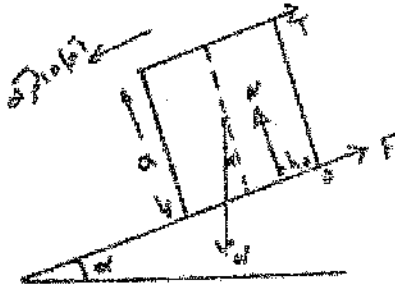
$$\mu w < w \frac{a}{h} \Rightarrow \mu < \frac{a}{h}$$

مثال (٤) :

مكعب مصمت منتظم موضوع على مستوى خشن معامل احتكاكه μ ومائل على الأفقى بزاوية α بحيث كان وجهان منه يوازيان خط أكبر ميل. ربط منتصف الحرف

العلوى من المكعب يخطط يوازى خط أكبر ميل ليمنع المكعب من الحركة. اثبت أنه حتى نضمن اتزان المكعب يجب أن يكون $\tan \alpha \leq (1 + 2\mu)$.

الحل :



كما بالشكل المقابل القوى المؤثرة على

المكعب هي وزنه w لاسفل والشد T

وقوة الاحتكاك F إلى أعلى المستوى

ورد الفعل العمودى N ويؤثر على بعد

h من نهاية المكعب O . عند وصول رد

الفعل العمودى N إلى نقطة O ($h = 0$) من العزم حول نقطة O نجد أن

$$T = \frac{w}{2} (\sin \alpha + \cos \alpha) \quad (1)$$

ومن الاتزان نجد أن

$$F + T = w \sin \theta \quad (2)$$

من (1), (2) نجد أن

$$F = \frac{w}{2} (\sin \alpha - \cos \alpha)$$

ولكى تضمن إتزان المكعب فإن الاحتكاك F يجب أن يحقق العلاقة الآتية:

$$F \leq \mu N$$

$$\frac{w}{2} (\sin \alpha - \cos \alpha) \leq \mu w \cos \alpha \Rightarrow w \sin \alpha \leq (1 + 2\mu) w \cos \alpha$$

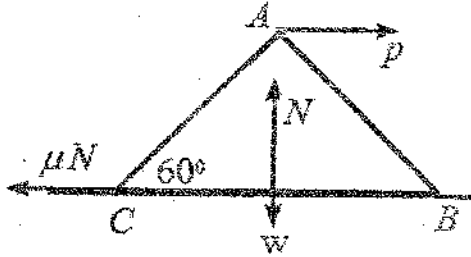
$$\therefore \sin \alpha \leq (1 + 2\mu) \cos \alpha \Rightarrow \tan \alpha \leq (1 + 2\mu)$$

مثال (٥) :

صفحة على هيئة مثلث متساوى الأضلاع ترتكز فى وضع رأسى بأحد أضلاعها

على مستوى أفقى خشن. إذا أثرت قوة أفقية متزايدة عند الرأس العلوية للصفحة وفي مستويها ، أوجد أكبر قيمة لمعامل الاحتكاك بحيث تنزلق الصفحة دون أن تنقلب.

الحل:



نفرض أن الصفحة تتركز على المستوى الأفقى بقاعدتها BC وأن طول ضلع الصفحة a ووزنها w .

فى حالة الاحتكاك النهائى تكون قوة الاحتكاك μN حيث رد الفعل العمودى $N = w$. وفى حالة انزلاق الصفحة يكون $p = \mu w$.

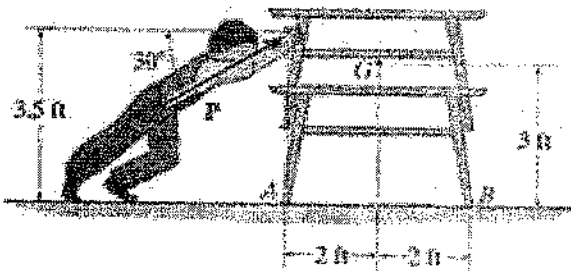
وحتى لا يحدث انقلاب حول B يجب أن يكون عزوم القوى التى من الممكن أن تسبب دوران حول B جهة اليمين أقل من عزوم تلك التى من الممكن أن تسبب الدوران جهة اليسار حول نفس النقطة. أى أن

$$w \cdot \frac{a}{2} > p \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$$\therefore \mu w < \frac{w}{\sqrt{3}} \Rightarrow \mu < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

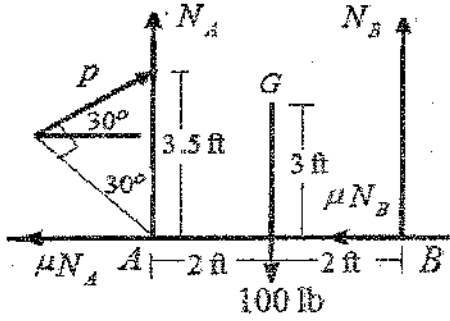
مثال (٦) :

إذا كان مركز كتلة مجموعة من المناضد وزنها 100 lb يقع عند النقطة G كما هو



موضح بالشكل. أوجد أقل قوة يبذلها الفرد حتى تتحرك مجموعة المناضد على السطح الخشن ذو معامل الاحتكاك عند كل من A, B هو $\mu = 0.3$.

ثم أوجد ردى الفعل العمدى عند كل من A, B .



الحل:

بتحليل القوى المؤثرة على
مجموعة المناضد فى الاتجاهين
الأفقى والرأسى نجد أن:

$$N_A + N_B + p \sin 30^\circ = 100 \quad (1)$$

$$\mu(N_A + N_B) = p \cos 30^\circ \quad (2)$$

بحل المعادلتين معا (واستخدام $\mu = 0.3$) نجد أن

$$p = 29.53 \text{ N}, \quad N_A + N_B = 85.25$$

بأخذ العزوم حول النقطة A نجد أن

$$4N_B = p \times 3.5 \times \cos 30^\circ + 100 \times 2 \Rightarrow N_B = 72.37 \text{ N}$$

$$N_A = 12.88 \text{ N} \quad \text{وبالتالى فإن}$$

ثالثاً- اتزان القضبان المتصلة على مستوى خشن :

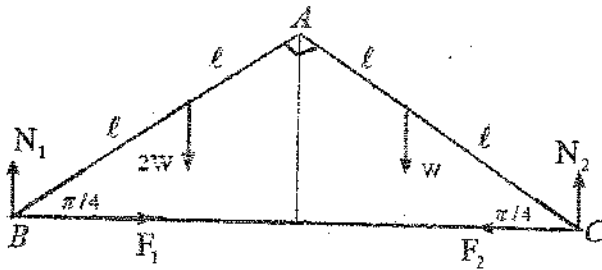
فى هذا النوع من المسائل مجموعة من القضبان المتصلة اتصالاً مفصلياً أملاًساً ومرتكزة ارتكازاً بسيطاً على مستوى خشن عند نقطتين. وفى هذه المسألة ليس من الضرورى حدوث الانزلاق عند النقطتين فى آن واحد، أى أن قوة الاحتكاك تكون نهائية عند نقطة بينما تكون غير نهائية عند النقطة الأخرى. لذلك يجب ألا نترض أن قوة الاحتكاك متساوية $\forall$ ، إلا إذا كنا متأكدين تماماً بأن الانزلاق على وشك الحدوث.

مثال (٦) :

اتصل طرفا قضيبين منتظمين متساويين في الطول ووزن أحدهما ضعف وزن الآخر بمفصل أملس بينما ارتكز الطرفان الآخران على مستوى أفقى خشن وكان مستوَاهما رأسيا فإذا علم أن حالة الاتزان النهائية تحدث عندما يتعامد القضيبان فأوجد معامل الاحتكاك.

الحل :

من اتزان المجموعة نلاحظ أن قوة الاحتكاك F_1 عند B تساوى وتضاد في الاتجاه



قوة الاحتكاك F_2 عند C لعدم

وجود أى قوة أفقية أخرى تؤثر

على المجموعة كوحدة واحدة.

نفرض أن طول القضيب

2ℓ وبأخذ العزوم حول B

لمجموعة القوى نجد أن:

$$2w\ell \sin(\pi/4) + w3\ell \sin(\pi/4) = N_2 4\ell \sin(\pi/4)$$

$$\therefore N_2 = \frac{5}{4}w \quad (1)$$

وباتزان القوى الرأسية يكون

$$N_1 + N_2 = 3w \quad (2)$$

بالتعويض من (1) فى (2) نحصل على

$$N_1 = \frac{7}{4}w \quad (3)$$

نفرض أن الطرف B على وشك الانزلاق فإن الاحتكاك يكون نهائيا وعندها يجب أن

يساوى

$$F_1 = \mu N_1 = \frac{7}{4} \mu w$$

أما إذا كان الطرف C على وشك الانزلاق فعندئذ يجب أن يكون الاحتكاك نهائياً ويساوى

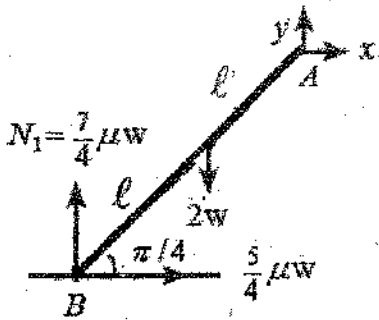
$$F_2 = \mu N_2 = \frac{5}{4} \mu w$$

وحيث أن قوة الاحتكاك تزداد من الصفر إلى القيمة النهائية μN فإن في هذه المسألة

سوف تصل إلى القيمة الأصغر $\frac{5}{4} \mu w$ قبل أن تصل إلى القيمة الأكبر $\frac{7}{4} \mu w$.

لذلك تصبح المجموعة كوحدة واحدة على وشك الانزلاق عندما تكون قوة الاحتكاك عند كل من C ، B هي

$$F_1 = F_2 = F = \frac{5}{4} \mu w$$



وبدراسة اتزان أحد القضيبين وليكن AB بمفرده بعد فصلهما وبأخذ العزوم حول A

$$2w \ell \sin \frac{\pi}{4} + \frac{5}{4} \mu w 2 \ell \sin \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4} w 2 \ell \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{3}{5}$$

مثال (٧) :

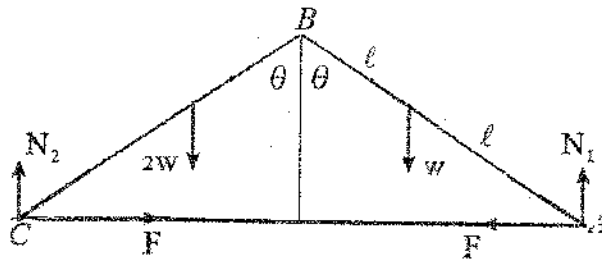
قضيبان منتظمان AB ، BC متساويان في الطول يرتبطان بمفصل أملس عند B

وموضعا في مستوى رأسي بحيث يتركز الطرفان A, C على مستوى أفقي خشن. أثبت أنه إذا كان وزن أحدهما ضعف وزن الآخر فإن أقل قيمة لمعامل الاحتكاك تكفي

لحفظ اتزان القضيبين هي $\frac{3}{5} \tan \theta$ حيث θ هي الزاوية بين القضيبين.

الحل :

نفرض أن طول كل قضيب 2ℓ وأن وزن القضيب AB هو w ووزن القضيب BC هو $2w$.



ونفرض كذلك أن رد الفعل العمودي عند A هو N_1 وعند C هو N_2 .

بدراسة اتزان القضيبين نجد أن :

من اتزان مركبة القوى الأفقية نجد أن قوتي الاحتكاك عند كل من A, C متساويتان في المقدار (وليكن F) ومتضادتان في الاتجاه ، ومن اتزان مركبة القوى الرأسية نجد أن

$$3w = N_1 + N_2$$

بأخذ العزوم حول C نحصل على

$$2w \cdot \ell \sin \theta + w \cdot 3\ell \sin \theta = N_1 \cdot 4\ell \sin \theta$$

ومن المعادلتين نحصل على

$$N_1 = \frac{5}{4}w, \quad N_2 = \frac{7}{4}w$$

بفصل القضيبين ودراسة اتزان القضيب AB :
 بأخذ العزوم حول B نحصل على

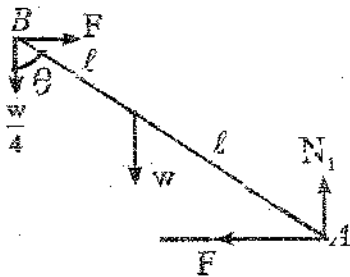
$$N_1 \cdot 2\ell \sin\theta = F \cdot 2\ell \cos\theta + w \cdot \ell \sin\theta$$

$$\Rightarrow F = \frac{3}{4} w \tan\theta$$

$$\therefore \frac{F}{N_1} = \frac{3}{5} \tan\theta, \quad \frac{F}{N_2} = \frac{3}{7} \tan\theta$$

أى أن

$$F/N_1 > F/N_2$$



ولكى نحصل على أقل قيمة لمعامل الاحتكاك تكفى لحفظ الاتزان يجب أن نعتبر قوة الاحتكاك عند A قوة احتكاك لانتهائية. أى أن

$$\mu = \frac{3}{5} \tan\theta$$

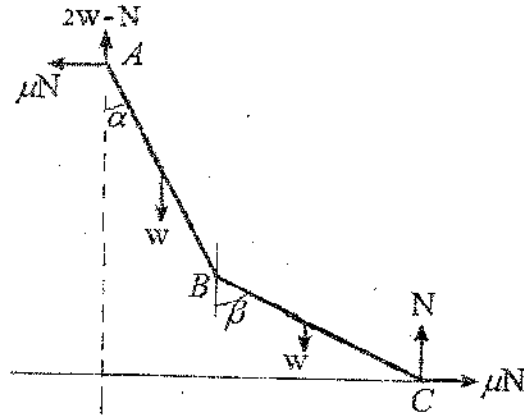
مثال (٨) :

قضيبان منتظمان AB, BC متساويان فى الطول والوزن متصلان اتصالاً حراً عند B (أى مفصل أملس) ويمر بهما مستوى رأسى واحد ، والطرف A متصل بمفصل أملس فى نقطة ثابتة بينما يلامس الطرف C مستوى أفقى خشن معامل احتكاكه μ . إذا كان القضيب AB فى وضع الاتزان النهائى يميل على الرأسى لأسفل بالزاوية α بينما يميل القضيب BC على الرأسى لأسفل بالزاوية β ، أثبت أن

$$\mu = 2/(\cot\alpha - 3\cot\beta)$$

الحل :

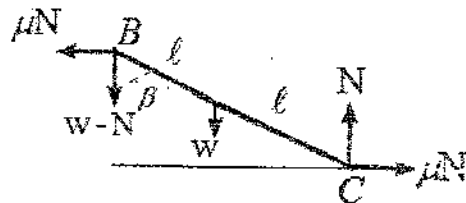
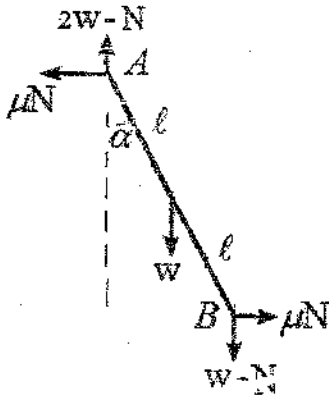
نفرض أن طول القضيب 2ℓ ووزنه w . في وضع الاتزان النهائي تكون قوة الاحتكاك عند الطرف C مساوية μN حيث N هي رد الفعل العمودي. من اتزان القضيبين معا نجد أن مركبات رد الفعل عند المفصل A هما $(-\mu N, 2w - N)$ كما بالرسم التالي.



نفصل القضيبين ودراسة اتزان كل منهما على حده كما يلي.

أولاً: دراسة اتزان القضيب AB :

من شرط انعدام القوى المؤثرة على القضيب نحصل على مركبات رد الفعل عند المفصل B كما هي موضحة على الرسم.



بأخذ العزوم حول B نحصل على

$$\mu N \cdot 2\ell \cos \alpha + w \cdot \ell \sin \alpha = (2w - N) \cdot 2\ell \sin \alpha$$

$$\Rightarrow N = \frac{3w \sin \alpha}{2(\mu \cos \alpha + \sin \alpha)} \quad (1)$$

ثانياً : دراسة اتزان القضيب BC :

بأخذ العزوم حول B نحصل على

$$\mu N \cdot 2\ell \cos \beta + N \cdot 2\ell \sin \beta = w \cdot \ell \sin \beta$$

$$\Rightarrow N = \frac{w \sin \beta}{2(\mu \cos \beta + \sin \beta)} \quad (2)$$

من المعادلتين (1), (2) نحصل على

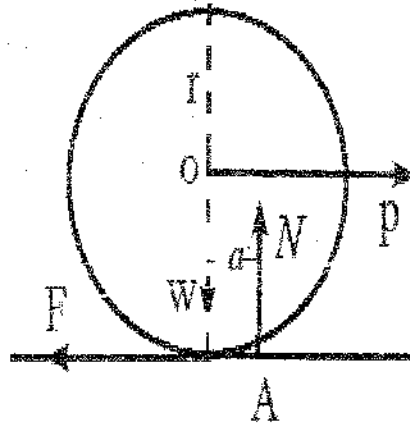
$$\mu = 2/(\cot \alpha - 3 \cot \beta)$$

رابعاً: احتكاك التدرج :

الاحتكاك الذى يظهر فى الأنواع الثلاثة السابقة يسمى باحتكاك الانزلاق لأن الجسم يختل اتزانه بالانزلاق. هناك أشكال لها شكل هندسى خاص يمكن أن يختل اتزانها بالتدرج مثل القرص والاسطوانة والكرة. عندما نجد جسم له مقطع دائرى على الأرض فإنه يتدرج (بمعنى أن يدور حول مركز الدائرة بينما يزاح مركز الدائرة إزاحة انتقالية). وفى الحالة المثالية التى لا يحدث فيها انزلاق يتساوى طول القوس المقطوع على الدائرة مع هذه الإزاحة. وإذا كانت الأرض والجسم المتدرج تسمى الصلبة فإن التلامس يكون فى نقطة واحدة (قرص أو كرة) أو فى راس واحد (اسطوانة) ويتبقى قوة صغيرة جداً لإحداث التدرج. وفى الحقيقة يحدث قدر من الانبعاج ويكون التلامس على مساحة محدودة. فإذا أثرت قوة أفقية p عند المركز O وجعلت الجسم على وشك التدرج حول النقطة A التى يتركز عندها رد الفعل العمودى N وقوة الاحتكاك F فإن

$$N=w, \quad F=p$$

النقطة A تبعد عن الرأس المار بالمركز بمسافة a تسمى ذراع مقاومة التدرج.



بأخذ العزوم حول O نحصل على

$$Fr = Na$$

المقدار $L = Na = wa$ يسمى عزم مقاومة التدرج. كذلك $F = p = \frac{a}{r} N = \eta N$

حيث $\eta = \frac{a}{r}$ وبالتالي فإن $L = \eta r N$.

وتسمى η معامل احتكاك التدرج. المسافة a صغيرة جداً، أى أن η صغيرة جداً.

فمثلاً في حالة عجلة من الصلب تتدرج على قضيب من الصلب نجد مثلاً

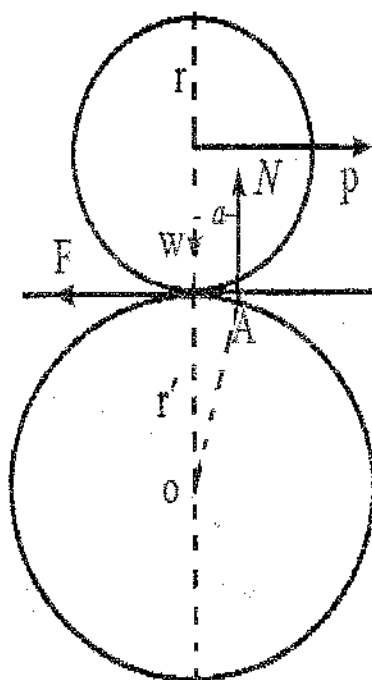
$r = 50 \text{ cm}$, $a = 0.05 \text{ cm}$ إذن $\eta = 0.001$ (وهى أصغر بكثير من معامل احتكاك

الانزلاق $\eta = 0.15$ في حالة انزلاق على الصلب) وهذا يعنى أن قوة الجر اللازمة في

حالة احتكاك التدرج أقل بكثير من قوة الجر اللازمة في حالة الاحتكاك الانزلاقي

العادى. وهذا هو الذى جعل لاختراع العجلة فائدة كبيرة.

وإذا كان لدينا اسطوانة نصف قطرها r ووزنها w على وشك التدرج على اسطوانة



أخرى نصف قطرها r' تحت تأثير قوة ساحبة p وتكون F قوة الاحتكاك ، و R رد الفعل الكلى و N مركبته فى اتجاه رأسى موازى للوزن w .
بأخذ العزوم حول كل من O, A نحصل على:

$$p(r+r')=Fr'$$

$$wa=pr$$

$$N=w$$

ذراع مقاومة التدرج يساوى a ، عزم مقاومة التدرج هو

$$L=wa, \quad p=\frac{a}{r}w=\frac{L}{r}$$

$$F=\frac{(r+r')p}{r'}=(1+\frac{r}{r'})p=p+\frac{a}{r'}w>p,$$

$$F = \frac{(r+r')p}{r'} = \frac{(r+r')a}{rr'} w = \eta N$$

$$\eta = \frac{(r+r')a}{rr'}$$

حيث معامل احتكاك التدرج

كذلك نجد أن

$$L = aw = aN = \eta \left(\frac{rr'}{r+r'} \right) N$$

توضيح مفيد في حل المسائل :

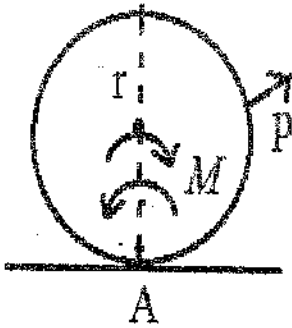
مما سبق نستنتج ما يأتي:

إذا أثرت قوة p على عجلة نصف قطرها r فإنه يمكن نقلها إلى A بقوة p وازدواج عزمه M الذي يسبب التدرج. فإذا كان الجسم على وشك التدرج فإن

$$M = L$$

حيث L مقاومة التدرج الذي يحسب من العلاقة

$$L = \eta r \times (\text{رد الفعل العمودي})$$

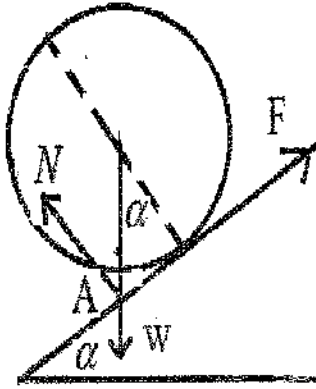


مثال (٩) :

وضع قرص منتظم ثقيل على مستوى خشن يميل على الأفقي بزاوية α . أثبت أنه يبدأ في التدرج إذا كان $\eta = \tan \alpha$ حيث η معامل احتكاك التدرج.

الحل :

عندما يصبح القرص على وشك التدرج إلى أسفل المستوى حول A يكون



$$F = \eta N = \eta w \cos \alpha ,$$

$$F = w \sin \alpha$$

$$\therefore \eta w \cos \alpha = w \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \eta = \tan \alpha$$

مثال (١٠) :

وضع قرص نصف قطره r ووزنه w على مستوى أفقى خشن بحيث كان مستواه رأسياً. أثرت عليه قوة p فى اتجاه المماس للقرص ويصنع زاوية θ مع الأفقى. فإذا كان القرص على وشك التدرج أثبت أن :

$$\frac{p}{w} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha + \cos(\theta - \alpha)}$$

وذلك بفرض أن معامل احتكاك التدرج η يتعين من العلاقة $\eta = \tan \alpha$

الحل :

عندما يكون القرص على وشك التدرج فإن

$$L = \eta r \times (\text{رد الفعل العمودى})$$

$$= \eta r (w - p \sin \theta) \quad (1)$$

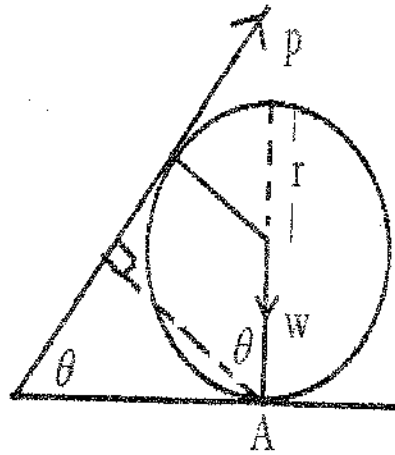
بأخذ العزوم حول A نجد أن

$$L = p(r + r \cos \theta) \quad (2)$$

من المعادلتين (1), (2) نحصل على

$$p(1 + \cos \theta + \eta \sin \theta) = \eta w ,$$

$$\eta = \tan \alpha$$



$$p(1 + \cos \theta + \eta \sin \theta) = \eta w, \quad \eta = \tan \alpha$$

$$\therefore \frac{p}{w} = \frac{\tan \alpha}{1 + \cos \theta + \tan \alpha \sin \theta}$$

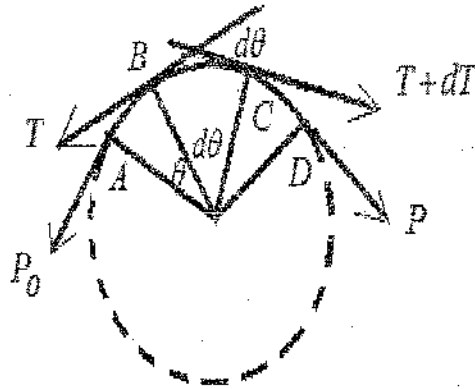
$$= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha + \cos(\theta - \alpha)}$$

خامساً: احتكاك السيور والخيوط مع السطوح الاسطوانية :

نعرف أن السير أو الخيط المثالي هو ذلك الجسم الذي فيه بعدان صغيران جداً بالنسبة للبعد الثالث (الطول). وهو ميكانيكياً يكاد لا يقاوم قوى القص أو عزوم الانحناء أو قوى الضغط ولا يقاوم إلا قوى الشد وبالتالي فإن القوة الوحيدة التي يمكن أن تظهر فيه وتكون محسوسة هي قوى الشد.

ولدراسة الاحتكاك نفرض أن الخيط (السير) يمس سطح الاسطوانة الدائرية في القوس ABCD والذي يقابل الزاوية المركزية α وأن معامل الاحتكاك بينهما μ ويؤثر في نهايتي الخيط المنطبق على هذا القوس الدائري القوتين p, p_0 في اتجاهي المماسين عند D, A على الترتيب كما بالشكل التالي.

نلاحظ أن الجزء BC من الخيط متزن تحت تأثير القوتين $T, T+dT$ في اتجاهي المماسين عند B, C على الترتيب ، ومركبتي رد الفعل المحصل في اتجاه العمودي على المماس عند B



وقوة الاحتكاك $dF = \mu dR$ في اتجاه المماس (الخيط على وشك الانزلاق). وبذلك فمن

شروط الاتزان نحصل على (في اتجاه المماس عند B والعمودي عليه)

$$(T+dT)\cos(d\theta)=T+\mu dR,$$

$$dR=(T+dT)\sin(d\theta)$$

وحيث أن الزاوية $d\theta$ صغيرة فمن الممكن اعتبار أن $\cos(d\theta)=1$,

$\sin(d\theta)=d\theta$ وعندئذ يمكن إهمال الحد الثاني في الطرف الأيمن من المعادلة الثانية

وبذلك نحصل على

$$dT=\mu dR, \quad dR=T d\theta$$

وبحذف dR من المعادلتين السابقتين ثم التجميع على كل عناصر الخيط الملامس

للأسطوانة نحصل على

$$\int_{P_0}^P \frac{dT}{T} = \mu \int_0^\alpha d\theta \quad \Rightarrow \quad \ln[p/p_0] = \mu\alpha$$

$$\therefore p = p_0 e^{\mu \alpha}$$

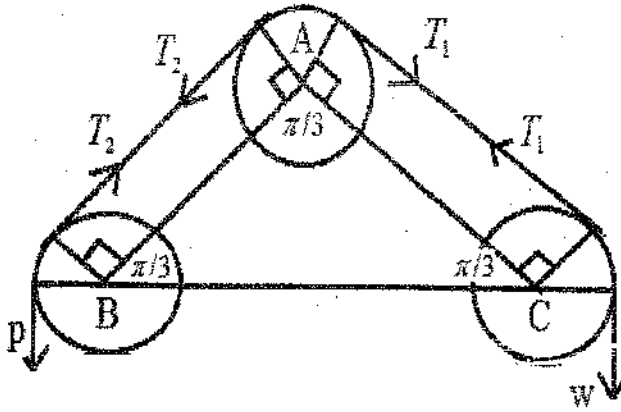
ملحوظة هامة : عندما يكون السطح أملس فإن $\mu = 0$ وبالتالي يكون $p = p_0$ ، أى أن الشد في جميع أجزاء الخيط يكون ثابتاً.

مثال (١١) :

ثلاث أوتاد متساوية نصف قطر كل منها a ، وضعت عند رؤوس المثلث المتساوي الأضلاع ABC بحيث كان BC أفقياً والرأس A أعلى BC . لف خيط حول الثلاث أوتاد وأثر في أحد أطرافه الوزن w . أوجد القوة p التي يجب أن تؤثر في الطرف الآخر من الخيط حتى لا ينزلق.

الحل :

بتطبيق العلاقة السابق استنتاجها نجد أن



$$w = T_1 e^{\pi\mu/6}$$

$$T_1 = T_2 e^{2\pi\mu/3}$$

$$T_2 = p e^{\pi\mu/6}$$

بحذف T_1, T_2 من العلاقات السابقة نجد أن $p = w e^{-\pi\mu}$

تمارين

١. أثبت أن أقل قوة F والتي تكفي لمنع جسم من الانزلاق لأسفل مستوى مائل خشن وتؤثر في اتجاه المستوى تساوى $F = \sin(\alpha + \lambda) / \sin(\alpha - \lambda)$ مع العلم بأن زاوية الاحتكاك λ أقل من زاوية ميل المستوى α .

٢. إذا كانت F هي أقل قوة تلزم لتحريك جسم لأعلى مستوى مائل خشن. أثبت أن أقل قوة في اتجاه المستوى والتي تلزم لتحريك هذا الجسم إلى أعلى تساوى $F = \sqrt{1 + \mu^2}$ حيث μ معامل الاحتكاك.

٣. وضع مخروط قائم مصمت بقاعدته على مستوى خشن يميل بزاوية $\pi/6$ على الأفقى. بين أن المخروط ينقلب عندما تكون نسبة ارتفاعه إلى نصف قطر قاعدته هي $4\sqrt{3}:1$. ما هو أقل معامل احتكاك حتى يحدث انقلاب المخروط قبل انزلاقه.

٤. وضع مخروط قائم مصمت زاوية رأسه 2β بقاعدته على مستوى خشن يميل على الأفقى بزاوية α . أثرت قوة p موازية لخط أكبر ميل للمستوى عند رأس المخروط، إذا زادت هذه القوة تدريجياً فأثبت أن المخروط ينزلق قبل أن ينقلب إذا كانت:

أ. p تعمل لأعلى خط أكبر ميل $\mu < \tan \beta - 3 \tan \alpha / 4$

ب. p تعمل لأسفل خط أكبر ميل $\mu < \tan \beta + 3 \tan \alpha / 4$

٥. وضعت صفيحة مربعة الشكل على مستوى خشن ومائل على الأفقى بزاوية α بحيث ينطبق أحد أضلاعها على خط أكبر ميل للمستوى. ربط خيط في رأس المربع العليا وشد في اتجاه يوازي خط أكبر ميل لأعلى المستوى. أثبت أنه إذا زاد الشد بالتدريج فإن الصفيحة تنزلق أو تنقلب حسبما يكون ميل المستوى أصغر أو أكبر من

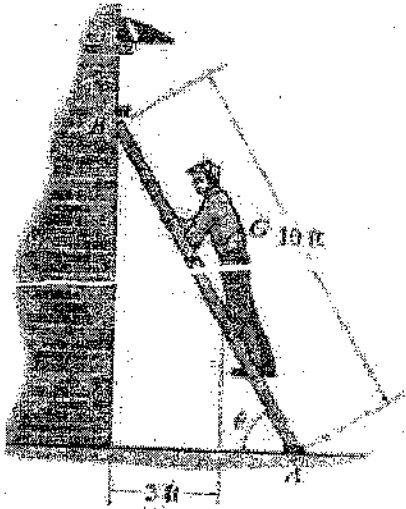
$$\tan^{-1}(1 - 2\mu)$$

٦. ABC صفيحة مثلثية قائمة الزاوية في C وترتكز بقاعدتها BC على مستوى أفقى خشن. فإذا دار المستوى الأفقى تدريجياً بحيث كانت الصفيحة فى مستوى منطبق على خط أكبر ميل للمستوى المائل وكانت النقطة B أعلى من النقطة C بين أن الصفيحة تبدأ فى الانزلاق أو الانقلاب تبعا لقيمة معامل الاحتكاك إذا كان أصغر أو أكبر من

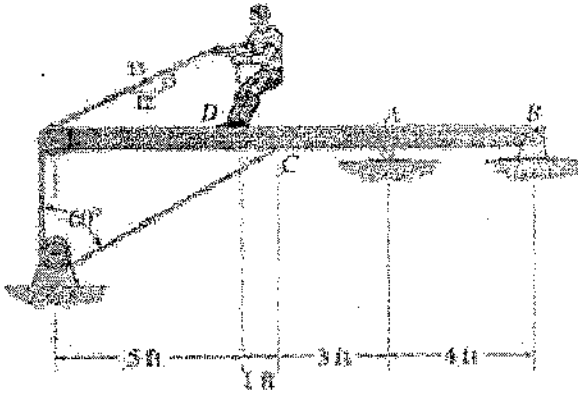
$$\tan \hat{A}$$

٧. يتصل سلمان منتظم ومنتساويان عند نهاية واحدة بمفصلة سهلة ويستند الطرفان الآخران للسلمين على مستوى أفقى خشن. يصعد رجل وزنه يساوى وزن كل من السلمين على أحدهما. أثبت أن السلم الآخر ينزلق أولاً. وإذا بدأ السلم الآخر فى الانزلاق عندما يصعد الرجل مسافة x وبفرض أن a طول كل سلم و θ زاوية ميل كل سلم على الرأسى أثبت أن معامل الاحتكاك يساوى $(a+x) \tan \theta / (2a+x)$.

٨. AB, BC قضيبان منتظمان متساويان وزن كل منهما w متصلان بمفصل أملس عند B ويقعان فى مستوى رأسى واحد وكان A, C على خط أكبر ميل فى مستوى خشن مائل على الأفقى بزاوية α وكان BC أفقياً. أوجد ردى الفعل عند B, C

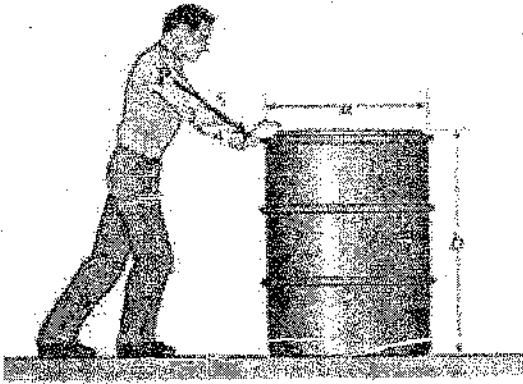


٩. يصعد رجل وزنه 180lb سلم يستند بأحد طرفيه B على حائط أملس وبطرفه الآخر A على أرضية خشنة كما بالرسم. إذا توقف الرجل عند الموضع الموضح بالشكل عندما شعر بأن السلم سينزلق وكان يميل على الأفقى بالزاوية $\theta = 60^\circ$. أحسب معامل الاحتكاك بين السلم والأرضية إذا أهملنا وزن السلم.



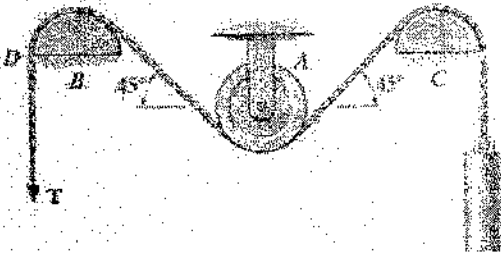
١٠. يقف شخص وزنه 80 lb على قضيب خشن منتظم وزنه 100 lb ويشد الحبل بقوة تكفي لانزلاقه كما بالشكل. إذا كان معامل الاحتكاك يساوي 0.4 أوجد ردی الفعل عند كل من A, B . مع العلم بأن البكرات مهملة الأبعاد.

١١. فی التمرین السابق إذا كان الشخص يشد الحبل بقوة تساوي 40 lb أوجد ردی الفعل عند كل من النقطتين A, B .



١٢. فی الشكل المقابل برميل وزنه 100 lb موضوع على مستوى خشن معامل احتكاكه 0.6 . إذا كان $a = 2 \text{ ft}$, $b = 3 \text{ ft}$ أحسب أقل مقدار للقوة p لكي يبدأ البرميل فی الحركة.

١٣. فی التمرین السابق أوجد أقل مقدار للقوة p لكي ينقلب البرميل.



١٤. إذا كان أكبر مقدار للشد فی الحبل الموضح بالشكل المقابل هی $T = 500 \text{ N}$ وكانت البكرة عند A حرة الدوران ومعامل الاحتكاك

لسطحي الجسمين عند كل من B, C يساوى 0.25. أوجد أكبر كتلة للأسطوانة المعلقة بالحبل.

١٥. قضيب منتظم طوله ℓ ووزنه w' مثبت طرفه بسطح كرة وزنها w ونصف قطرها r موضوعة على مستوى خشن يميل بزاوية α على الأفقى وامتداده يمر بمركز الكرة. إذا كانت الكرة على وشك التدرج فأحسب معامل احتكاك التدرج.

الباب الرابع

اتزان السلاسل والخيوط القابلة للانحناء

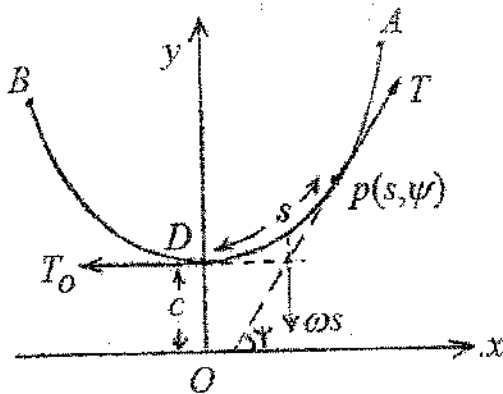
الكثينة CATENARY :

فى هذا الباب سوف ندرس الاتزان لنوع خاص من السلاسل والخيوط. وهى التى لها قابلية تامة للتشكل والانحناء بسهولة. هذا النوع من السلاسل يكون فيها الإجهاد عند أى مقطع عمودى على السلسلة (أو الخيط) عبارة عن قوة الشد الوحيدة وتكون فى اتجاه المماس للسلسلة.

الكثينة العادية :

إذا علق حبلا (نو قابلية تامة للانحناء ومنتظم الكثافة) من نقطتين ثابتتين واتزن تحت تأثير وزنه فقط. فإن شكل المنحنى الذى يتخذه الحبل يسمى بمنحنى الكثينة. وفيما يلى سوف ندرس خواص هذا المنحنى وكذلك سوف نستنتج معادلته فى الصور المختلفة. (ذاتية - كارتيزية - بارامترية)

(١-٤) المعادلة الذاتية :



فى الشكل المقابل سلسلة منتظمة وزن وحدة الطول منها ωs . علق تحت تأثير وزنها من النقطتين A, B . وفيها النقطة D أسفل نقطة على المنحنى وعندها المماس أفقيا.

باختيار أى نقطة P على السلسلة احداثياتها الذاتية (s, ψ) حيث s طول القوس PD ،

وبدراسة إتزان الجزء DP من السلسلة تحت تأثير القوى:

$$(1) \text{ الوزن رأسيا لأسفل ويساوى } \omega s$$

$$(2) \text{ الشد } T \text{ فى اتجاه المماس عند } P \text{ ويصنع } \psi \text{ مع الأفقى.}$$

$$(3) \text{ الشد } T_0 \text{ أفقيا عند النقط } D.$$

ويلاحظ أنها ثلاث قوى متلاقية فى نقطة واحدة. وبالتحليل فى الاتجاه الأفقى والرأسى نحصل على معادلات الاتزان.

$$T \cos \psi = T_0 \quad (1)$$

$$T \sin \psi = \omega s \quad (2)$$

وباعتبار الشد T_0 عند النقطة D يساوى وزن جزء من السلسلة طوله c . إذن يمكن كتابة

$$T_0 = \omega c \quad (3)$$

وبالتعويض فى (1)

$$\therefore T \cos \psi = \omega c \quad (1')$$

وبقسمة المعادلة (2) على المعادلة (1') نحصل على

$$\tan \psi = \frac{s}{c}$$

$$\therefore s = c \tan \psi \quad (4)$$

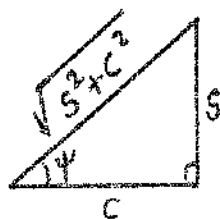
تسمى المعادلة (4) بالمعادلة الذاتية لمنحنى الكتينة. (يلاحظ أنها علاقة بين الإحداثيات

الذاتية (s, ψ) لأية نقطة P على المنحنى).

من المعادلة (4) يمكن استنتاج العلاقات التالية والتي سنحتاج إليها فى البراهين التالية

$$\left. \begin{aligned} \therefore s &= c \tan \psi \\ \frac{ds}{d\psi} &= c \sec^2 \psi \\ \sin \psi &= \frac{s}{\sqrt{s^2 + c^2}} \\ \cos \psi &= \frac{c}{\sqrt{s^2 + c^2}} \end{aligned} \right\}$$

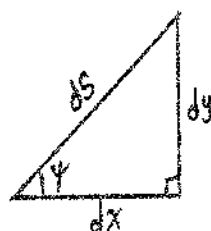
(5)



أيضا نعلم أن عنصر الطول ds نحصل عليه من

$$\left. \begin{aligned} (ds)^2 &= (dx)^2 + (dy)^2 \\ \therefore \frac{ds}{dx} &= \sqrt{1 + y'^2} \end{aligned} \right\}$$

(6)



(7)

$$\left. \begin{aligned} \sin \psi &= \frac{dy}{ds} \\ \cos \psi &= \frac{dx}{ds} \end{aligned} \right\}$$

(٢-٤) المعادلة الكارتيزية :

لإيجاد المعادلة الكارتيزية لابد من اختيار المحاور الكارتيزية المناسبة. لذلك نختار محور السينات هو الأفقي على بعد C من أسفل نقطة D على منحنى الكتينة ونختار محور الصادات الرأسى المار بالنقطة D .

نفرض أن إحداثيات النقطة الاختيارية P فى الإحداثيات الكارتيزية (x, y) .

المعادلة الكارتيزية هى العلاقة بين تلك الإحداثيات الكارتيزية.

نعلم أن المشتقة التفاضلية تساوى ميل المماس

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \tan \psi$$

بالتعويض عن $\tan \psi$ من المعادل الذاتية (4) نحصل على

$$y' = \frac{1}{c} s$$

$$\therefore \frac{dy'}{dx} = \frac{1}{c} \frac{ds}{dx}$$

وبالتعويض عن $\frac{ds}{dx}$ من المعادلة (6):

$$\therefore \frac{dy'}{dx} = \frac{1}{c} \sqrt{1 + y'^2}$$

بفصل المتغيرات والتكامل

$$\int \frac{dy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{1}{c} \int dx$$

$$\Rightarrow \sinh^{-1}(y') = \frac{x}{c} + C_1$$

ولإيجاد الثابت C_1 نستخدم الشروط عند أسفل نقطة:

$$\text{at } D: \quad x=0, \quad y=c, \quad y'=0$$

نحصل على $C_1 = 0$

$$\therefore \sinh^{-1}(y') = \frac{x}{c} \quad \Rightarrow \quad y' = \sinh \frac{x}{c}$$

$$\therefore \int dy = \int \sinh \left(\frac{x}{c} \right) dx$$

$$\Rightarrow \quad y = c \cosh \left(\frac{x}{c} \right) + C_2$$

وبالتعويض بالشروط عند D

$$c = c \cosh(0) + C_2, \quad \therefore \cosh(0) = 1$$

$$C_2 = 0$$

مل على

$$\therefore y = c \cosh\left(\frac{x}{c}\right)$$

المعادل الكارتيزية لمنحنى الكتينة.

(المعادلات البارامترية :

مقصود بالمعادلة البارامترية هي إيجاد كل من x, y بدلالة متغير ثالث وسيط بارامتر.

جاء كل من x, y بدلالة s :

$$\therefore \frac{dx}{ds} = \cos \psi$$

$\cos \psi$ من المعادلة (7)

$$\therefore \frac{dx}{ds} = \frac{c}{\sqrt{c^2 + s^2}}$$

أمل وباستخدام الشروط عند D :

$$(x = 0, y = c, s = 0, \psi = 0)$$

بالمثل : بما أن $\frac{dy}{ds} = \sin \psi$ وباستخدام (7) نجد أن

$$\frac{dy}{ds} = \frac{s}{\sqrt{c^2 + s^2}}$$

وبفصل المتغيرات والتكامل وبالتعويض بالشروط عند D نحصل على

$$y = \sqrt{c^2 + s^2} \quad (10)$$

المعادلتان (9), (10) هما معادلة منحنى الكثينة بدلالة البارامتر (s)

(ii) إيجاد كل من x, y بدلالة ψ كبارامتر:

$$\therefore \frac{dx}{d\psi} = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{ds}{d\psi} = \cos \psi \cdot c \sec^2 \psi$$

$$\therefore \frac{dx}{d\psi} = c \sec \psi$$

بفصل المتغيرات والتكامل وباستخدام الشروط عند D نحصل على

$$x = \ln(\tan \psi + \sec \psi) \quad (11)$$

بالمثل

$$y = \frac{dy}{ds} \cdot \frac{ds}{d\psi} = \sin \psi \cdot c \sec^2 \psi = c \sec \psi \tan \psi$$

بفصل المتغيرات والتكامل نحصل على

$$y = c \sec \psi \quad (12)$$

المعادلتان (11), (12) هما المعادلات البارامتريية لمنحنى الكثينة بدلالة ψ كبارامتر

ملاحظات هامة :

(i) تمكنا من استنتاج كل من المعادلة الكارتيذية والمعادلات البارامتريية بالاس

بالمعادلة الذاتية.

- (ii) يمكن استنتاج المعادلات البارامترية (12), (11) وذلك بحذف s بدلالة ψ من المعادلات البارامترية (10), (9). وبالعكس يمكن استنتاج المعادلات البارامترية (10), (9) وذلك بحذف ψ بدلالة s من المعادلات البارامترية (12), (11).
- (iii) يمكن استنتاج المعادلة الكارتيزية (8) وذلك بحذف s من المعادلتين (10), (9)، وأيضاً بحذف (ψ) من المعادلتين (12), (11).
- ④ متروك للطالب برهان كل ما ورد سابقاً في البندين (ii)، (iii).

(٤-٤) الشد عند أى نقطة على منحنى الكتينة :

لإيجاد الشد T فى اتجاه ψ اس عند أى نقطة P نحصل عليها بالتربيع والجمع للمعادلتين (1), (2):

$$(c^2 + s^2)$$

$$+ s^2$$

وباستخدام المعادلة (10):

$$(13)$$

وبالتالى يكون الشد عند أى نقطة T يساوى وزن طول مساوياً لـ $\sin \psi$ والنقط.

⑤ ومن المعادلة (2) يتضح أن المركبة الرأسية للشد عند أى نقطة $(\sin \psi)$

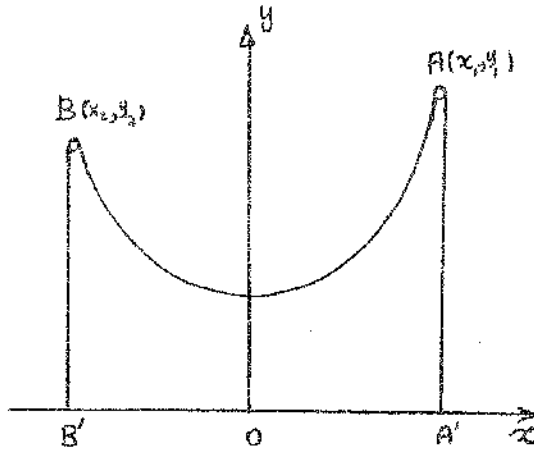
تساوى وزن الطول s من السلسلة.

⑥ ومن المعادلة (1) يتضح أن المركبة الأفقية للشد عند أى نقط $(T \cos \psi)$

تساوى الشد عند أسفل نقطة T_0 (أى تساوى $w c$) وهى مقدار ثابت.

أما المحور x (والذى يبعد مسافة c عن رأس الكتينة) يسمى دليل الكتينة.

(٥-٤) حالة مشهورة تظهر في بعض التمارين :



إذا وضعت السلسلة على بكرتين A, B صغيرتين متساويتين بحيث يتدلى طرفيها رأسيا لأسفل (كما بالشكل) فإنه في وضع الاتزان يكون أطراف السلسلة واقعا على دليل الكتينة (المحور x).

ويمكن برهان ذلك باستخدام خاصية أن الشد على يمين البكرة المتساوية يساوى الشد على يسارها.

أخيرا هناك صور أخرى لبعض المعادلات السابقة قد تكون مفيدة في حل بعض التمارين. فالمعادلات (9) تأخذ الصور التالية

$$s = c \sinh\left(\frac{x}{c}\right), \quad (9')$$

$$x = c \ln\left(\frac{s+y}{c}\right) \quad (9'')$$

(٦-٤) الصور التقريبية لمعادلة الكتينة (أسلاك التلغراف والتليفونات):

من المعروف أنه عند تركيب أسلاك البرق والتليفونات بين الأعمدة فإنه يتم شد السلك عند نقاط التعليق بحيث يصل الشد عندها إلى أقصى قيمة يمكن أن يتحملها السلك.

والهدف من ذلك هو أن تصل أسفل نقطة من نقاط السلك إلى أقصى ارتفاع ممكن لها عن سطح الأرض. أى أن زيادة الشد عند نقاط التعليق يؤدي إلى زيادة البارامتر c

وبالتالى تناقص المقدار $\frac{x}{c}$.

فإذا فرضنا أن الشد قد تزايد حتى أصبحت قيمة x صغيرة بالنسبة إلى قيمة c لدرجة

أنه يمكن إهمال الحدود ذات القوى الأعلى من الثالثة للمقدار $\frac{x}{c}$ فإن

$$\begin{aligned} y &= c \cosh \frac{x}{c} = \frac{c}{2} (e^{x/c} + e^{-x/c}) \\ &= \frac{c}{2} \left[\left(1 + \frac{x}{c} + \frac{x^2}{2c^2} + \frac{x^3}{6c^3} + \frac{x^4}{4!c^4} + \dots \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{x}{c} + \frac{x^2}{2c^2} - \frac{x^3}{6c^3} + \frac{x^4}{4!c^4} - \dots \right) \right] \\ \therefore y &= \frac{c}{2} \left[2 + \frac{x^2}{c^2} + 2 \frac{x^4}{4!c^4} + \dots \right] \end{aligned}$$

وحيث أنه يمكن إهمال الحدود ذات القوى الأعلى من الثالثة للمقدار $\frac{x}{c}$ فإن

$$y = c + \frac{x^2}{2c}$$

$$\therefore x^2 = 2c(y - c) \quad (14)$$

وبالتالى فإن السلك سيأخذ شكل منحنى قطع مكافئ معادلته هي المعادلة السابقة. نلاحظ

بين نقطتين على خط أفقى والمسافة بينهما تساوى $2a$ ، فإن انخفاض أسفل نقطة بالسلك عن الخط الواصل بين نقطتى التعليق تساوى

$$d = \frac{a^2}{2c} = \frac{c}{2} \left(\frac{a}{c} \right)^2$$

وهو مقدار صغير وأقل بكثير من البعد البؤرى.

بالمثل نجد أن

$$\begin{aligned} s &= c \sinh \frac{x}{c} = \frac{c}{2} (e^{x/c} - e^{-x/c}) \\ &= \frac{c}{2} \left[\left(1 + \frac{x}{c} + \frac{x^2}{2c^2} + \frac{x^3}{6c^3} + \frac{x^4}{4!c^4} + \dots \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(1 - \frac{x}{c} + \frac{x^2}{2c^2} - \frac{x^3}{6c^3} + \frac{x^4}{4!c^4} - \dots \right) \right] \\ \therefore s &= x + \frac{x^3}{6c^2} \end{aligned}$$

وإذا كان طول السلك 2ℓ فإن

$$2\ell - 2a = \frac{a^3}{3c^2} = \frac{8}{3} \left(\frac{a^3}{2a} \right)$$

وهو مقدار صغير وأقل بكثير من طول الوتر البؤرى العمودى.

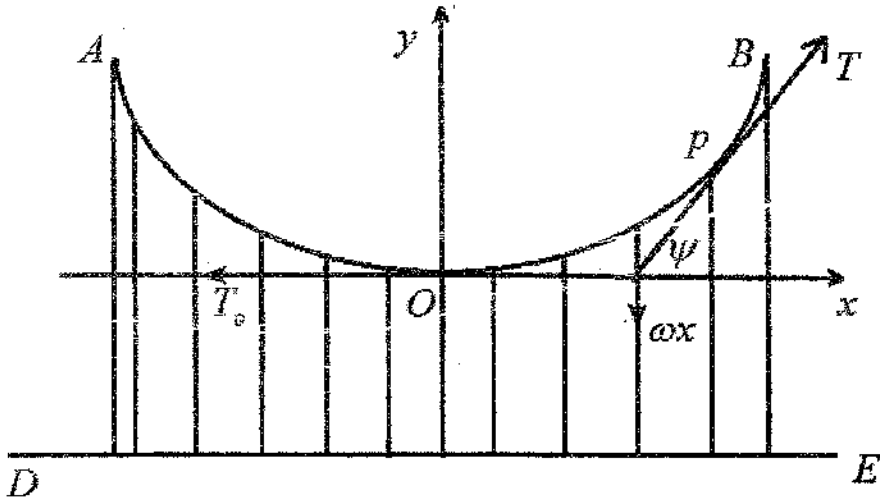
ملحوظة : إذا كانت x كبيرة بالنسبة إلى c فإنه يمكن إهمال $e^{-x/c}$ نظرا لصغرها

بالنسبة إلى $e^{x/c}$ وفى هذه الحالة يكون

$$y = \frac{c}{2} e^{x/c} \quad (14')$$

(٧-٤) الكبارى المعلقة :

الكوبرى المعلق عبارة عن كابل مهمل الوزن ومعلق بين نقطتين A, B ويحمل قوائم رأسية مهملة الوزن أيضاً وتحمل بدورها الطريق DE . ويتم تصميم الكوبرى المعلق بحيث يكون وزن الطريق وما يمر عليه موزعاً توزيعاً أفقياً منتظماً ، أى أن وزن وحدة الأطوال ω من الطريق تكون مقداراً ثابتاً. لإيجاد معادلة المنحنى الذى يأخذه الكابل AB نأخذ أسفل نقطة من الكابل (المماس عندها أفقياً) نقطة أصل للمحاور الكارتيه والذائيه والمحور الأفقي المار بها يكون المحور ox والمحور الرأسى لأعلى يكون المحور oy .



بأخذ أية نقطة اختيارية p من نقاط الكابل ولتكن إحداثياتها (x, y) ودراسة اتزان الجزء op من الكابل نجد أن :

$$T \cos \psi = T_0 , \quad T \sin \psi = \omega x$$

وبالقسمة نحصل على

وبالتالى يكون

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega}{T_0} x$$

بفصل المتغيرات والتكامل نجد أن (حيث يتلشى ثابت التكامل لتلشى كل x, y من عند نقطة الأصل O).

$$y = \frac{\omega}{2T_0} x^2$$

وهذه المعادلة تمثل معادلة قطع مكافئ محوره رأسى ورأسه لأسفل وطول وتره البؤرى العمودى يساوى $\frac{2T_0}{\omega}$.

ويمكن الحصول على الشد عند النقطة الاختيارية p مباشرة من معادلات الاتزان ليكون

$$T = \sqrt{T_0^2 + \omega^2 x^2}$$

مثال (١) :

إذا علقت سلسلة من نقطتين فى نفس المستوى الأفقى وكان عمق السلسلة يساوى

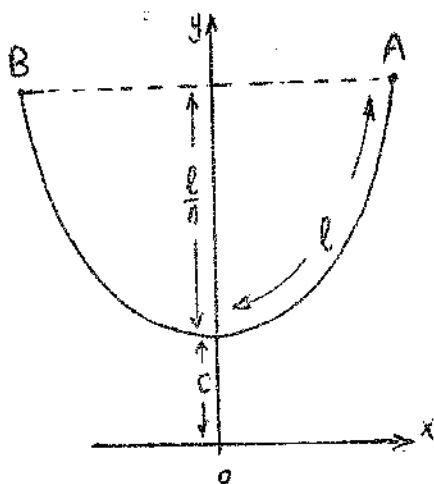
$\frac{\ell}{n}$ حيث 2ℓ طول السلسلة. اثبت أن المسافة الأفقية بين نقطتى التعليق تساوى

$\ell \left(n - \frac{1}{n} \right) \ln \left(\frac{n+1}{n-1} \right)$. ثم برهن أن النسبة بين الشد عند نقطة التعليق إلى الشد عند

أسفل نقطة تساوى $\frac{n^2+1}{n^2-1}$.

الحل:

عند النقطة A :



$$y = \frac{\ell}{n} + c, \quad s = \ell,$$

$$\therefore y^2 = s^2 + c^2$$

$$\therefore \left(\frac{\ell}{n} + c \right)^2 = \ell^2 + c^2$$

ومنها نحصل على

$$2 \left(n - \frac{1}{n} \right) = \frac{\ell}{2n} (n^2 - 1) \quad (1)$$

$$y = \frac{\ell}{n} + c : A \text{ عند}$$

وبالتعويض عن قيمة c من المعادلة (1):

$$y = \frac{\ell}{n} + \frac{\ell}{2n} (n^2 - 1) = \frac{\ell}{2n} (2 + n^2 - 1)$$

$$\therefore y = \frac{\ell}{2n} (n^2 + 1) \quad (2)$$

ولإيجاد البعد الأفقي AB : بالتعويض من (1), (2) في

$$AB = 2x = 2c \ln \left(\frac{s+y}{c} \right)$$

$$= 2 \left[\frac{1}{2} \ell \left(n - \frac{1}{n} \right) \right] \ln \left\{ \left[\ell + \frac{\ell}{2n} (n^2 + 1) \right] \frac{2n}{\ell (n^2 - 1)} \right\}$$

$$= \ell \left(n - \frac{1}{n} \right) \ln \left\{ \frac{2n + n^2 + 1}{n^2 - 1} \right\}$$

$$= \ell \left(n - \frac{1}{n} \right) \ln \left\{ \frac{(n+1)^2}{n^2 - 1} \right\}$$

$$\therefore AB = \ell \left(n - \frac{1}{n} \right) \ln \left(\frac{n+1}{n-1} \right),$$

$$\frac{T_A}{T_D} = \frac{wy}{wc} = \frac{y}{c}$$

وبالتعويض من (1)، (2) نحصل على

$$\frac{T_A}{T_D} = \frac{\ell}{2n} (n^2 + 1) \frac{2n}{\ell(n^2 - 1)} = \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1}$$

مثال (٢) :

تطير طائرة من الورق على ارتفاع h من سطح الأرض بواسطة خيط ثقيل منتظم غير مرن طوله ℓ . فإذا كان الطرف الحر للخيط على الأرض والمماس للخيط عند هذا الطرف أفقياً فثبت أن ميل الخيط عند الطائرة على الأفقى يساوى $2 \tan^{-1}(h/\ell)$

وأن الشد في الخيط عند الطائرة يساوى $w \frac{\ell^2 + h^2}{2h}$ وعند الأرض على يساوى

$w \frac{\ell^2 - h^2}{2h}$. حيث w هي وزن وحدة الطول من الخيط.

الحل :

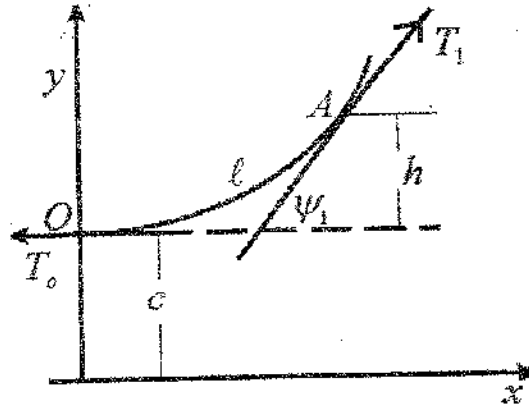
بما أن المماس عند الأرض أفقياً، فإن رأس الكتينة يكون عند نقطة تلامس الخيط مع

الأرض كما بالشكل. نعين بارامتر الكتينة من العلاقة $y^2 = s^2 + c^2$

عند الطائرة نجد أن

$$(h+c)^2 = \ell^2 + c^2$$

$$\Rightarrow h^2 + 2hc = \ell^2$$



$$\therefore c = \frac{\ell^2 - h^2}{2h} \quad (*)$$

من المعادلة الذاتية لمنحنى الكتينة

$$s = c \tan \psi$$

عند الطائرة يكون

$$\tan \psi_1 = \frac{\ell}{c} = \frac{2h\ell}{\ell^2 - h^2} = \frac{2h/\ell}{1 - (h/\ell)^2}$$

فإذا وضعنا $\tan \alpha = \frac{h}{\ell}$ نحصل على

$$\tan \psi_1 = \tan(2\alpha)$$

ومنها يتضح أن

$$\psi_1 = 2\alpha = 2 \tan^{-1} \left(\frac{h}{\ell} \right)$$

وهو المطلوب أولاً.

من العلاقة (*) نجد أن ارتفاع الطائرة فوق المحور ox (الدليل) هو

$$y_1 = h + c = h + \frac{\ell^2 - h^2}{2h} = \frac{\ell^2 + h^2}{2h}$$

وبالتالى بتطبيق العلاقة $T = \omega y$ عند الطائرة فإن الشد عند الطائرة يكون

$$T_1 = \omega y_1 = \omega \frac{\ell^2 + h^2}{2h}$$

والشد عند نقطة التلامس مع الأرض يكون

$$T_o = \omega c = \omega \frac{\ell^2 - h^2}{2h}$$

مثال (٣) :

سلسلة ثقيلة منتظمة طولها $64a$ تمر على وتدين أملسين واقعين على نفس الخط الأفقى فإذا كانت أسفل نقطة من الجزء المنحنى من السلسلة تقع على عمق a أسفل الخط الأفقى الواصل بين الوتدين فأوجد طول الجزء المنحنى من السلسلة وكذلك الاجزاء الرأسية ثم أوجد البعد بين الوتدين. أخيرا أحسب الضغط على أى من الوتدين.

الحل :

بما أن الأوتاد ملساء فإن الشد على جانبي الوتد متساويان وعلى ذلك فإن الأطراف الحرة المتدلية B', A' للسلسلة تقع على المحور x للكتينة. نفرض أن الجزء المتدلى

$$AA' = BB' = \ell_1 \quad (1)$$

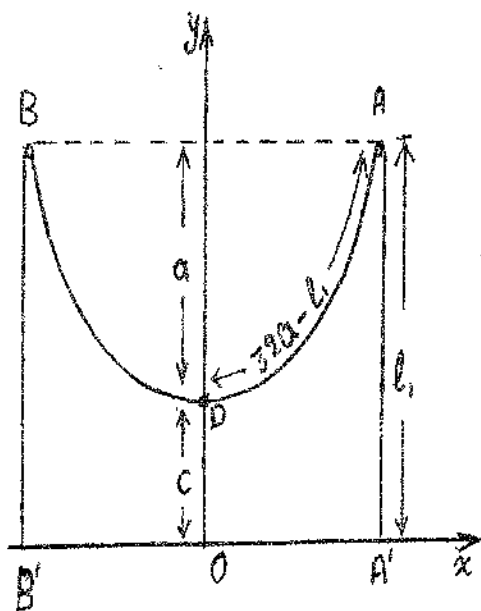
وبالتالى فإن عند النقطة A ، نجد أن

$$s_A = 32a - \ell_1 = 31a - c, \quad (2)$$

$$y^2 = s^2 + c^2$$

$$\therefore (a+c)^2 = (31a-c)^2 + c^2$$

$$c^2 - 64ac + 960a^2 = 0$$



$$(c - 40a)(c - 24a) = 0$$

$$\therefore c = 40a \text{ or } c = 24a \quad (3)$$

وبالتعويض عن قيم c من (3) في (2) :

$$s_A = 31a - 40a = -9a$$

وهذا مرفوض.

$$\text{at } c = 24a,$$

$$s_A = 31a - 24a = 7a$$

مما سبق يكون ثابت الكتلة

وطول الجزء المنحني

$$2s_A = 2(7a) = 14a$$

والأجزاء الرأسية

$$y_A = l_1 = a + c = 25a$$

ولإيجاد البعد الأفقي بين الوتدين

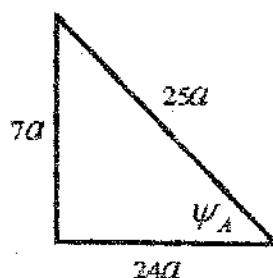
$$AB = 2x_A$$

$$\therefore x = c \ell \left(\frac{s+y}{c} \right)$$

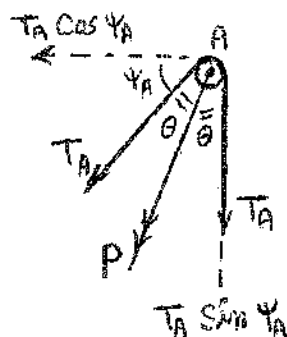
$$x_A = 24a \ln \left(\frac{7a + 25a}{24a} \right)$$

$$= 24a \ln(4/3)$$

$$\therefore AB = 48a \ln(4/3)$$



الضغط على البكرة A هو محصلة الشدين على جانبي البكرة



ملحوظة :

يمكن مباشرة استخدام القانون

$$P = 2T \cos \theta$$

∴ المركبة الأفقية للضغط :

$$T_A \cos \psi_A$$

والمركبة الرأسية للضغط :

$$T_A + T_A \sin \psi_A$$

$$\therefore P^2 = (T_A \cos \psi_A)^2 + (T_A + T_A \sin \psi_A)^2$$

$$= T_A^2 [\cos^2 \psi_A + 1 + 2 \sin \psi_A + \sin^2 \psi_A]$$

$$P^2 = 2T_A^2 (1 + \sin \psi_A),$$

$$\therefore T_A = 25a\omega, \sin \psi_A = \frac{7}{25}$$

$$\therefore P = 40a\omega$$

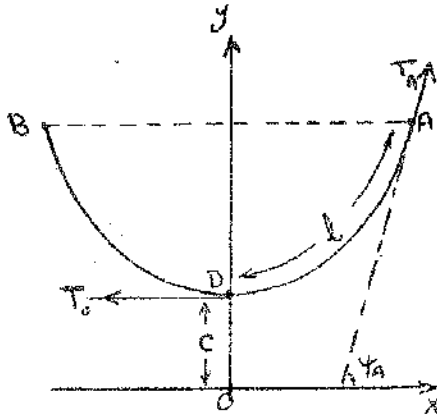
مثال (٤) :

علقت سلسلة منتظمة طولها 2ℓ من النقطتين A ، B في نفس المستوى الأفقى حيث كان الشد عند نقطة التعليق يساوى n من المرات الشد عند أسفل نقطة. اثبت أن

$$\frac{2\ell}{\sqrt{n^2 - 1}} \ln(n + \sqrt{n^2 - 1})$$
 المسافة بين نقطتى التعليق تساوى

الحل:

نفرض أن T_A هو الشد عند نقطة A حيث



$$T_A = \omega y_A \quad (1)$$

$$y_A = \sqrt{\ell^2 + c^2}$$

وأن T_0 هو الشد عند النقطة

D حيث

$$T_0 = \omega c$$

$$\therefore T_A = nT_0$$

$$\omega y_A = n\omega c$$

$$\therefore y_A = nc$$

وبالتعويض عن قيمة y_A

$$\therefore \ell^2 + c^2 = n^2 c^2$$

$$c^2(n^2 - 1) = \ell^2$$

$$\therefore c = \ell / \sqrt{n^2 - 1} \quad (2)$$

$$y_A = nc = n\ell / \sqrt{n^2 - 1} \quad (3)$$

$$\therefore x = c \ln \left(\frac{s+y}{c} \right)$$

$$\therefore x_A = \frac{\ell}{\sqrt{n^2 - 1}} \ln \left[\left(\ell + \frac{n\ell_0}{\sqrt{n^2 - 1}} \right) \left(\frac{\sqrt{n^2 - 1}}{\ell} \right) \right]$$

$$\therefore x_A = \frac{\ell}{\sqrt{n^2 - 1}} \ln \left(n + \sqrt{n^2 - 1} \right)$$

وبالتالى يكون البعد الأفقى

$$AB = 2x_A$$

$$\Rightarrow AB = \frac{2\ell}{\sqrt{n^2 - 1}} \ln(n + \sqrt{n^2 - 1})$$

ملحوظة: لإيجاد الشد عند A :

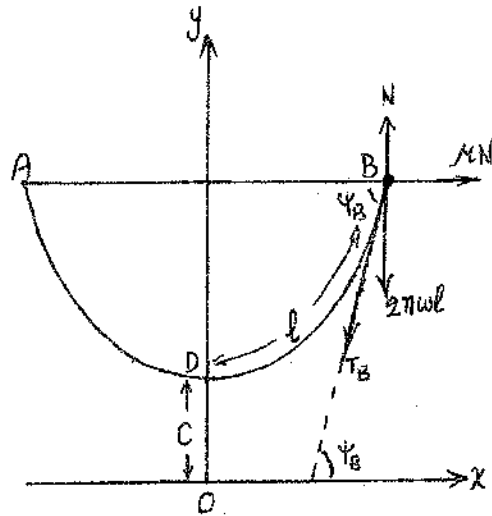
$$\therefore T_A = \omega y_A$$

$$\therefore T_A = \omega \frac{n\ell}{\sqrt{n^2 - 1}}$$

مثال (٥):

سلسلة طولها 2ℓ ربط احد طرفيها في نقطة ثابتة A وربط الطرف الآخر في حلقه تنزلق على قضيب أفقى خشن يمر بالنقط A . فإذا كان وزن الحلقة n من المرات وزن السلسلة. أثبت أن أكبر بعد للحلق عن النقطة A هو $(2\ell/\lambda) \ln(\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1})$ حيث $1/\lambda = \mu(2n+1)$ ، μ معامل الاحتكاك.

الحل:



اتزان الحلقة عند B تحت تأثير وزنها لأسفل $2n\omega\ell$ والشد في السلسلة T_B ورد الفعل العمودي N وأخيرا قوة الاحتكاك μN .

بالتحليل في الاتجاه الأفقي:

$$T_B \cos \psi_B = \mu N \quad (1)$$

وفي الاتجاه الرأسى:

$$T_B \sin \psi_B + 2n\omega\ell = N \quad (2)$$

ولكن من اتزان الجزء BD من السلسلة فإن المركبة الأفقية والرأسية للشد عند B :

$$T_B \cos \psi_B = T_o = \omega c \quad (3)$$

$$T_B \sin \psi_B = \omega \ell \quad (4)$$

بالتعويض من (4)، (3) في (2)، (1) نحصل على

$$\omega c = \mu N \quad (5)$$

$$\omega \ell + 2n\omega\ell = N \quad (6)$$

ويحذف N :

$$\therefore \omega c = \mu(\omega \ell + 2n\omega\ell)$$

$$\therefore c = \mu \ell(1 + 2n) = \frac{\ell}{\lambda} \quad (7)$$

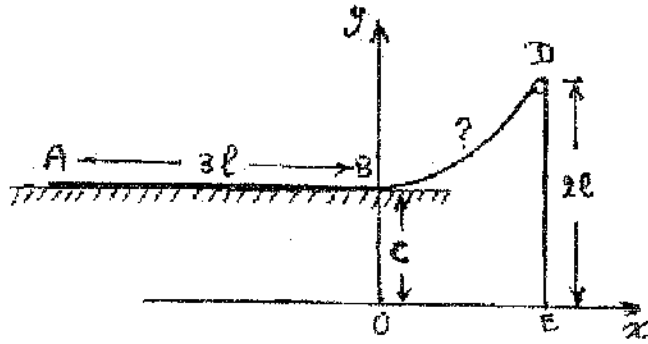
$$\therefore x = c \ln \left(\frac{s}{c} + \sqrt{\left(\frac{s}{c} \right)^2 + 1} \right)$$

$$\therefore AB = 2x_A = (2\ell/\lambda) \ln \left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1} \right)$$

مثال (٦) :

سلسلة منتظمة $ABDE$ بحيث كان AB يرتكز على مستوى أفقى خشن وتتمر حول بكرة صغيرة ملساء D ويتدلى منها DE رأسيا. إذا كان $AB = 3\ell$ ، $DE = 2\ell$. وكان معامل الاحتكاك $\mu = 1/\sqrt{3}$ أحسب طول منحنى الكتينة BD والشد عند D وكذلك اثبت أن الضغط على البكرة D يساوى $P = 2\sqrt{3}\omega\ell$.

الحل :



بما أن الطرف الحر E يقع على المحور ox

$$\therefore y_D = 2\ell \quad (1)$$

$$T = \omega y$$

$$T_D = \omega y_D = 2\omega\ell \quad (2)$$

وبدراسة اتزان السلسلة الأفقية AB :

$$T_0 = \mu N, \quad N = 3\omega\ell$$

$$\therefore T_0 = \omega c \quad \Rightarrow \quad T_0 = 3\mu\omega\ell$$

$$\therefore \mu = 1/\sqrt{3} \quad \therefore c = 3\mu\ell$$

$$\therefore c = \sqrt{3}\ell \quad (3)$$

والآن بدراسة منحنى الكتينة BD :

$$y^2 = s^2 + c^2$$

$$\therefore s^2 = y^2 - c^2$$

وعند النقطة D :

$$s_D^2 = (2\ell)^2 - (\sqrt{3}\ell)^2 = \ell^2$$

(4)

$$\therefore s_D = \ell$$

إن طول منحنى الكتينة $BD = \ell$ وهو المطلوب.

ولإيجاد الضغط P : وهو محصلة الشدين على جانبي البكرة D :

$$\therefore s = c \tan \psi$$

$$(s = \ell, c = \sqrt{3}\ell)$$

وعند النقطة D :

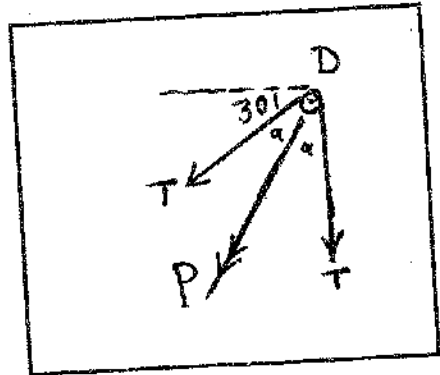
$$\tan \psi_D = \frac{\ell}{\sqrt{3}\ell} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\psi_D = 30^\circ = \pi/6$$

$$P^2 = T^2 + T^2 + 2TT \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 2T^2 + 2T^2\left(\frac{1}{2}\right) = 3T^2$$

$$\Rightarrow P = \sqrt{3}T$$



وبالتعويض عن T من (2)

$$P = 2\sqrt{3}\omega\ell$$

وهو المطلوب.

مثال (٧) :

سلسلة منتظمة طولها 2ℓ ووزنها W علقت من نقطتين في نفس المستوى الأفقي ثم علق من منتصفها ثقلا يجعل بعد هذه النقط عن الخط الأفقي المار بنقطتي التعليق يساوي h ، وإذا كان T هو مقدار الشد عند نقطتي التعليق. اثبت أن وزن الثقل المعلق يساوي

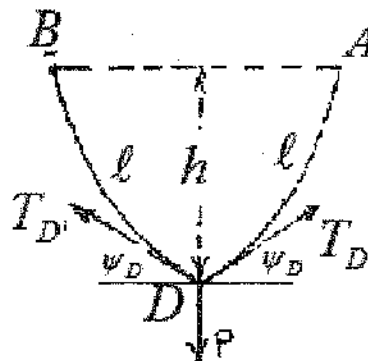
$$\frac{2h}{\ell}T - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{h^2}{\ell^2}\right)W$$

الحل :

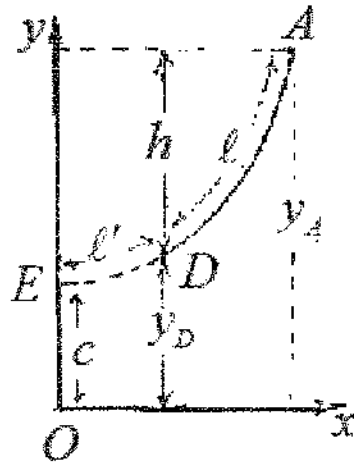
عند تعليق الثقل P في منتصف السلسلة D فإن هذه النقطة عندها المماس ليس أفقيا وعليه لا يمكن اعتبار D رأسى الكتينة.

وعليه يمكن اعتبار BD جزء من منحنى كتينة رأسها النقط E عندها المماس أفقيا: أولا: ندرس اتزان الثقل P عند D تحت تأثير الشدين T_D في اتجاه المماسين للجزئين AD ، BD حيث يصنع كل منهما زاوية ψ_D مع الأفقى (كما بشكل (أ)).

$$P = 2T_D \sin \psi_D$$



شكل (أ)



شكل (ب)

ومن معادلات الكتينة

$$T_D \sin \psi_D = \omega \ell'$$

حيث ℓ' طول ED من الكتينة، حيث أن وزن وحدة الطول $\omega = \frac{W}{2\ell}$

$$\therefore P = W \frac{\ell'}{\ell} \quad (1)$$

بما أن الشد عند نقط التعليق A :

$$T = \omega y_A$$

$$T = \frac{W}{2\ell} y_A$$

$$\therefore y_A = 2\ell \frac{T}{W} \quad (2)$$

من شكل (ب) : باستخدام القانون

$$y^2 = s^2 + c^2$$

$$y_A^2 = (\ell + \ell')^2$$

$$\therefore y_A^2 = \ell^2 + 2\ell\ell' + \ell'^2 + c^2 \quad (3)$$

وعند النقطة D :

$$y_D^2 = \ell'^2 + c^2,$$

$$\therefore y_D = y_A - h$$

$$\therefore (y_A - h)^2 = \ell'^2 + c^2$$

$$\Rightarrow y_A^2 - 2hy_A + h^2 = \ell'^2 + c^2 \quad (4)$$

من المعادلتين (3), (4) نجد أن :

$$2hy_A - h^2 = \ell^2 + 2\ell\ell'$$

$$\therefore 2\ell\ell' = 2hy_A - \ell^2 \left(1 + \frac{h^2}{\ell^2}\right)$$

بالتعويض عن y_A بدلالة الشد من (2)

$$\therefore 2\ell\ell' = 4h\ell \frac{T}{W} - \ell^2 \left(1 + \frac{h^2}{\ell^2}\right)$$

$$\therefore \ell' = 2h \frac{T}{W} - \frac{1}{2} \ell \left(1 + \frac{h^2}{\ell^2}\right) \quad (5)$$

بالتعويض عن ℓ' من (5) في (1) :

$$\therefore P = \frac{2h}{\ell} T - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{h^2}{\ell^2}\right) W$$

وهو المطلوب.

مثال (٨) :

إذا كان الوزن الكلي لكوبرى معلق يساوى 200 ، زرعة توزيعاً أفقياً منتظماً على بعده الأفقى البالغ 150 قدم وهبوط منتصف الكبل 20 قدم. أثبت أن أقل وأكبر شد هما على الترتيب 187.5 , 212.5 طن.

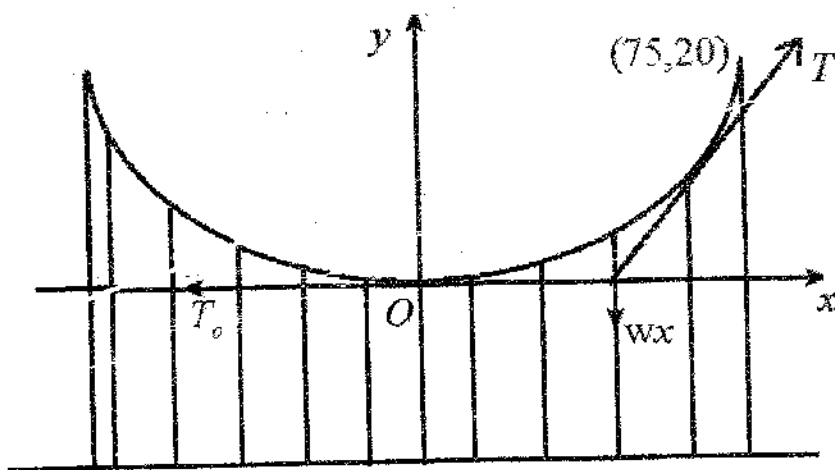
الحل :

من دراستنا للكوبرى المعلق نعلم أن الكبل يأخذ شكل القطع المكافئ :

$$y = \frac{w}{2T_0} x^2 \quad (*)$$

وأن الشد عند النقطة الاختيارية (x, y) يتحدد من العلاقة :

$$T = \sqrt{T_0^2 + w^2 x^2} \quad (**)$$



من الرسم نجد أن إحداثيات نقطة التعليق للكبل هي $(75, 20)$. باستخدام المعادلة (*) نجد أن :

$$20 = \frac{200/150}{2T_0} (75)^2 \Rightarrow T_0 = 187.5 \text{ Ton}$$

وهي أصغر قيمة للشد.

ومن المعادلة (**) نجد أن قيمة الشد عند نقطة التعليق $x=75 \text{ ft}$ تساوى

$$T = \sqrt{(187.5)^2 + (200/150)^2 (75)^2} = 212.5 \text{ Ton}$$

وهي أكبر قيمة للشد.

أمثلة متنوعة محلولة

١. استنتج المعادلة الكارتيزية لمنحنى الكتينة باستخدام المعادلات البارامترية الآتية:

$$x = c \sinh^{-1}\left(\frac{s}{c}\right), \quad y = \sqrt{c^2 + s^2} \quad \text{أولا:}$$

$$x = c \ln[\tan \psi + \sec \psi], \quad y = c \sec \psi \quad \text{ثانيا:}$$

الحل:

أولا:

$$\therefore x = c \sinh^{-1}\left(\frac{s}{c}\right) \Rightarrow \frac{s}{c} = \sinh\left(\frac{x}{c}\right)$$

$$\therefore s = c \sinh\left(\frac{x}{c}\right)$$

وبالتعويض في المعادلة $y^2 = c^2 + s^2$ عن s يكون

$$y^2 = c^2 + c^2 \sinh^2\left(\frac{x}{c}\right) = c^2 \cosh^2\left(\frac{x}{c}\right)$$

$$\therefore y = c \cosh \frac{x}{c}$$

ثانيا:

$$\therefore x = c \ln(\tan \psi + \sec \psi)$$

$$\therefore \tan \psi + \sec \psi = e^{x/c} \quad (1)$$

$$\therefore \sec^2 x - \tan^2 x = 1$$

$$\therefore (\sec x - \tan x)(\sec x + \tan x) = 1$$

وبالتعويض من المعادلة (1)

$$(\sec \psi - \tan \psi) e^{x/c} = 1$$

$$\therefore \sec \psi - \tan \psi = e^{-x/c} \quad (2)$$

بجمع المعادلتين (1), (2) نجد أن

$$2 \sec \psi = e^{x/c} + e^{-x/c}$$

$$\therefore \sec \psi = \cosh \left(\frac{x}{c} \right) \quad (3)$$

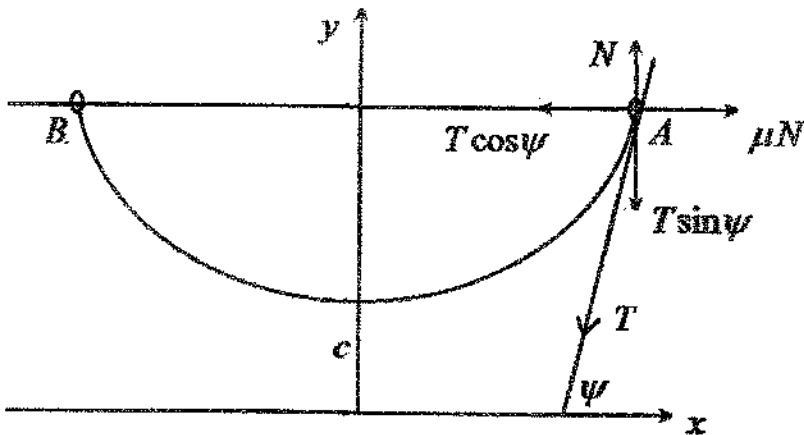
وبالتعويض في المعادلة $y = c \sec \psi$ نجد أن

$$y = c \cosh \left(\frac{x}{c} \right)$$

٢. سلسلة طولها 2ℓ يتصل طرفاها بحلقتين خفيفتين قابلتين للحركة على قضيب أفقي

خشن معامل احتكاكه $\frac{3}{4}$ اثبت أن أقصى اتساع للسلسلة $\frac{2}{3} \ell \cdot \ln(3)$

الحل :



ندرس أتران إحدى الحلقتين ولتكن الحلقة A

$$N = T \sin \psi, \quad \mu N = T \cos \psi$$

$$\therefore \tan \psi = \frac{1}{\mu}$$

$$\because \mu = \frac{3}{4} \Rightarrow \tan \psi = \frac{4}{3}$$

$$\therefore s = c \tan \psi$$

$$\therefore \ell = c \left(\frac{4}{3} \right) \quad \therefore c = \frac{3}{4} \ell$$

ولإيجاد أقصى اتساع

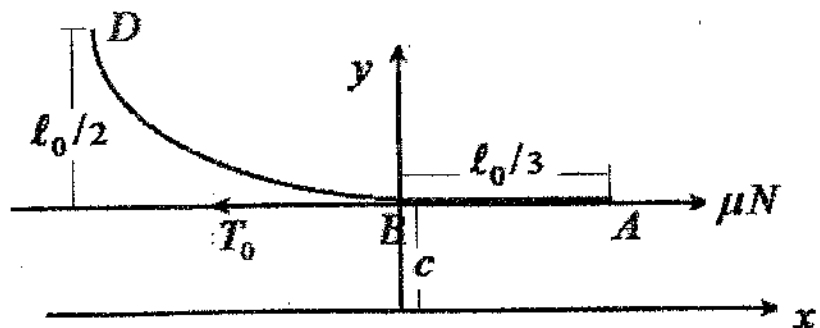
$$\therefore AB = 2x = 2c \cdot \ln(\tan \psi + \sec \psi)$$

$$AB = 2 \left(\frac{3}{4} \ell \right) \ln \left(\frac{4}{3} + \frac{5}{3} \right) = \frac{3}{2} \ell \cdot \ln(3)$$

٣. سلسلة طولها ℓ_0 تلتها من أحد طرفيها مفروود على نضد أفقى خشن وطرفها الخالص مثبت فى نقطة ترتفع على النضد $\ell_0/2$. فإذا اتزنت السلسلة اتزاناً نهائياً فى مستوى رأسى وكان معامل الاحتكاك بين النضد والسلسلة . اثبت أن

$$\text{أولاً: } c = \frac{1}{3} \mu \ell_0 \quad \text{ثانياً: } \mu = \frac{7}{12}$$

الحل :



من اتزان السلسلة AB على التضد نجد أن

$$N = \frac{1}{3} \omega \ell_0, \quad \mu N = T_0$$

$$\therefore \mu N = \omega c$$

$$\therefore \mu \left(\frac{1}{3} \omega \ell_0 \right) = \omega c$$

$$\therefore c = \frac{1}{3} \mu \ell_0$$

$$\therefore y^2 = c^2 + s^2,$$

at D

$$\left(\frac{\ell_0}{2} + c \right)^2 = c^2 + \left(\frac{2}{3} \ell_0 \right)^2$$

$$\frac{\ell_0^2}{4} + c^2 + \ell_0 c = c^2 + \frac{4}{9} \ell_0^2$$

$$\therefore c = \frac{4}{9} \ell_0 - \frac{1}{4} \ell_0 = \frac{7}{36} \ell_0$$

وبالتعويض عن c نحصل على

$$\frac{1}{3} \mu \ell_0 = \frac{7}{36} \ell_0 \Rightarrow \mu = \frac{7}{12} \ell_0.$$

٤. خيط ثقيل منتظم طوله ℓ معلق بين نقطتين ليسا في مستوى أفقى واحد فإذا كان رأس الكتينة يقع خارج نقطتى التعليق وكان h البعد الرأسى بين نقطتى التعليق اثبت أن

$$h = \ell \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) / \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

نقطتى التعليق مع الافقى.

الحل :

نفرض أن A, B نقطتي التعليق. إذن

$$\text{at } A: \quad s = s_1, \quad x = \alpha, \quad y = y_1$$

$$B: \quad s = s_2, \quad x = \beta, \quad y = y_2$$

$$\therefore \quad s = c \tan \psi$$

$$\text{at } A: \quad s_1 = c \tan \alpha$$

$$\text{at } B: \quad s_2 = c \tan \beta$$

بالطرح $s_1 - s_2 = \ell$ يكون

$$\therefore \ell = c(\tan \alpha - \tan \beta) \quad (1)$$

$$\therefore y = c \sec \psi$$

$$\text{at } A: \quad y_1 = c \sec \alpha$$

$$\text{at } B: \quad y_2 = c \sec \beta$$

$$\therefore y_1 - y_2 = h$$

$$\therefore h = c(\sec \alpha - \sec \beta) \quad (2)$$

بحذف c من المعادلتين (1), (2) نحصل على

$$h(\tan \alpha - \tan \beta) = \ell(\sec \alpha - \sec \beta)$$

بضرب الطرفين في $\cos \alpha \cos \beta$ نحصل على

$$h[\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta] = \ell[\cos \beta - \cos \alpha]$$

$$h[\sin(\alpha - \beta)] = \ell \left[2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \right]$$

$$h \left\{ 2 \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \right\} = 2 \ell \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\therefore h \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \ell \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)$$

$$\Rightarrow h = \ell \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) / \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

تمارين

١. علقت سلسلة طولها 2ℓ من النقطتين A ، B فى نفس المستوى الأفقى فإذا كان عمق السلسلة $\frac{\ell}{2}$ اثبت أن المسافة الأفقية تساوى $AB = \frac{3}{2}\ell \ln(3)$ وان الشد عند نقط التعليق يساوى $\frac{5}{3}$ مره من الشد عند رأس الكتينة (أعمق نقطة فى الكتينة).

٢. سلسلة منتظمة طولها 64 وحدة طول وضعت فوق بكرتين صغيرتين على خط أفقى واحد بحيث كان انخفاض رأس الكتينة (الواقعة بين البكرتين) عن الخط الأفقى المار بالبكرتين 1 وحدة بينما تدلى من الجانب الآخر لكل من البكرتين جزء من السلسلة. وفى وضع الاتزان أوجد طول السلسلة بين البكرتين والمسافة بينهما ثم اثبت أن الضغط على أى من البكرتين يساوى وزن 40 وحد طول من هذه السلسلة.

٣. علقت سلسلة منتظمة طولها $2\ell_0$ من النقطتين A ، B بحيث كان AB أفقيا فإذا كان الشد عند الطرف A يساوى ثلاث أمثال الشد عند رأس الكتينة. اثبت أن $AB = \frac{\ell_0}{\sqrt{2}} \ln(3 + 2\sqrt{2})$.

٤. سلسلة منتظمة سهلة الانحناء ربط إحدى طرفيها بحلقة خفيفة تمر خلال قضيب أفقى خشن إذا اتزنت السلسلة فى مستوى رأسى وجزء منها على نضد أفقى خشن. اثبت أنه فى وضع الاتزان النهائى يكون $\ell_1/\ell_2 = \mu_2/\mu_1$ حيث ℓ_1 الطول المنحنى من السلسلة، ℓ_2 طول جزء السلسلة على المستوى الأفقى. μ_1 معامل الاحتكاك بين الحلقة والقضيب، μ_2 معامل الاحتكاك بين السلسلة والنضد.

٥. سلسلة منتظمة طولها ℓ_0 وكان ثلثها من أحد الطرفين مفروود على نضد أفقى خشن وطرفها الخالص مثبت فى نقطة ترتفع عن النضد بمقدار $\ell_0/2$ فإذا اتزنت السلسلة

اتزان نهائى فى مستوى رأسى وكان معامل الاحتكاك بين النضد والسلسلة μ . اثبت أن $c = \mu \ell_0 / 3$ ، $\mu = 7/12$.

٦. سلسلة منتظمة طولها 2ℓ ووزنها W معلقة من نقطتين على خط أفقى واحد. فإذا

علم أن d عمق السلسلة. اثبت أن بارامتر الكثينة يساوى $\frac{\ell^2 - d^2}{2d}$ وأن الشد عند نقطة

التعليق يساوى $W \frac{\ell^2 + d^2}{4\ell d}$. ثم برهن أخيرا أن بحر الكثينة (البعد بين نقطتى التعليق)

$$\text{يساوى } \frac{\ell^2 - d^2}{d} \ln \left(\frac{\ell + d}{\ell - d} \right)$$

٧. سلسلة منتظمة ثقيلة طولها ℓ موضوعة على أرض أفقية خشنة فى خط مستقيم

(معامل الاحتكاك $\mu = \frac{1}{3}$) فإذا رفع أحد طرفى السلسلة ببطئ حتى أصبح الجزء

المرفوع من السلسلة يساوى نصفها وأصبح الجزء الآخر على وشك الانزلاق. اثبت أن

ارتفاع الطرف العلوى من السلسلة عن الأرض يساوى $\frac{\ell}{6}(\sqrt{10} - 1)$ وأن البعد الأفقى

$$\text{بين هذه النقطة ومنتصف السلسلة يساوى } \frac{\ell}{6} \ln(\sqrt{10} + 3)$$

٨. سلسلة منتظمة ثقيلة طولها $n\ell$ ربط أحد أطرافها بحلقة خفيفة حول قضيب أفقى

خشن معامل الاحتكاك بينه وبين الحلقة μ_1 . إذا استقر جزء من السلسلة على نضد أفقى

خشن معامل الاحتكاك بينه وبين السلسلة μ_2 . فى وضع الاتزان النهائى فى المستوى

الرأسى اثبت أن:

أولا: إذا كان طول جزء السلسلة على النضد الأفقى الخشن مساويا ℓ فإن العلاقة بين

معامل الاحتكاك على الصورة $\mu_2/\mu_1 = n-1$.

ثانياً: إذا كان الجزء المرفوع من السلسلة يساوى ℓ فإن العلاقة تكون على الصورة

$$\mu_2/\mu_1 = 1/(n-1)$$

٩. خيط ثقيل منتظم طوله ℓ معلق بين نقطتين ليس في مستوى أفقى واحد فإذا كان رأس الكتينة يقع خارج نقطتى التعليق وكان h البعد الرأسى بين نقطتى التعليق اثبت أن

$$h \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \ell \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

حيث α ، β زوايا ميل المماسات للخيط عند نقط التعليق مع الأفقى.

١٠. سلسلة طولها ℓ_0 معلقة بين نقطتين البعد الرأسى والأفقى بينهما A ، B على الترتيب، اثبت أن بارامتر الكتينة يحقق العلاقة

$$\sqrt{\ell_0^2 - A^2} = 2c \sinh\left(\frac{B}{2c}\right)$$

١١. سلسلة منتظمة وزنها W وطولها 2ℓ علفت من طرفيها A, B فى نفس المستوى الأفقى وعلق الوزن W' فى منتصف الخيط D فأصبح عمق D من الأفقى AB يساوى h اثبت أن الشد عند نقطة التعليق A ، B يساوى

$$h = \frac{2}{3}\ell \quad \text{وأخيراً إذا كان عمق } D \text{ عن الأفقى } h = \frac{1}{2} \left[\frac{\ell}{h} W' + \frac{\ell^2 + h^2}{2\ell h} W \right]$$

الشد فى هذه الحالة.

١٢. إذا كان طول كوبرى معلق يساوى 600 ft والتقوس لأسفل يساوى 60 ft ووزن الطريق يساوى 2 Ton/ft. أوجد مركبة الشد الأفقية فى كل من السلسلتين (أى عند منتصف الكابل) وكذلك الشد عند نقطة التعليق.

References

1. R.C. Hibbeler, "*Engineering Mechanics – Statics*", 12th Edition, Prentice Hall, Singapore (2010).
2. Beer, F.P. and Johnston Jr, E.R., "*Statics and Mechanics of Materials*", McGraw-Hill, Inc (1992).
3. A. Ruina and R. Pratap, "*Introduction to Statics and Dynamics*", Oxford University Press (2010).

