

المبحث الأول - المتجهات في الفراغ

١- كميات قياسية هي كميات التي يمكن التعبير عنها بمقدار فقط مثل [الزمن - المسافة - الحجم]

٢- كميات متجهة هي كميات التي يمكن التعبير عنها بمقدار واتجاهها مثل [السرعة - القوة - سرعة]

٣- متجهة الإزاحة هي إزاحة نقطة مادية من الموضع a إلى الموضع b في الفراغ ويرمز بالرمز $\vec{a}b$ أو $\vec{A}$ أو $\vec{A}$

مقدار الإزاحة $\vec{A} = \vec{ab} = b - a = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

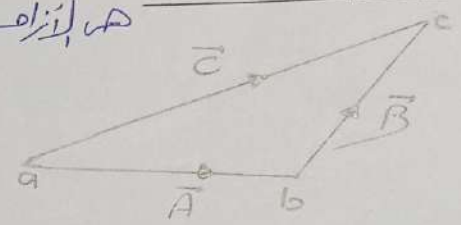
المسافة $|\vec{A}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

٤- قاعدة المثلث للمتجهات

هي إزاحة التي تمثل بالاضلاع التي يفضل المثلث في اتجاه

$\vec{ac} = \vec{ab} + \vec{bc}$

$\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$



٥- متجهة الوحدة هي متجهة ذات مقداره يساوي الوحدة

$\vec{A} = A\hat{e} \rightarrow \hat{e} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

هناك ثلاث متجهات وحدة هامة $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ وهي متجهات الوحدة لمحاور الإحداثيات x, y, z

٦- المتجهات بدلالة مركباته

متجهة الإزاحة $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$

مقدار الإزاحة $|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

$\cos \alpha = \frac{A_x}{A} = l$
 $\cos \beta = \frac{A_y}{A} = m$
 $\cos \gamma = \frac{A_z}{A} = n$

حيث α الزاوية بين المتجهة والمحور x
 β الزاوية بين المتجهة والمحور y
 γ الزاوية بين المتجهة والمحور z

$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

تستخدم هذه القاعدة عند وجود زاويتين والثالثة مجهولة

٧- متجه الموضع هو متجه الإزاحة الذي يربط نقطة الأصل ونقطة أي نقطة في الفراغ ويرمز له بالرمز $\vec{r}$

٨- الضرب القياسي للمتجهين حاصل ضرب مقادير المتجهين $\vec{A}, \vec{B}$ فربما عملاً الزاوية بينهما

$$\rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta \quad |A| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad |B| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$$

$$\rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|A||B|} \quad [0 \leq \theta \leq \pi]$$

$$\rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = [L] \rightarrow \text{قيمة قياسية}$$

$$\rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow A=0, B=0$$

$$\rightarrow A \perp B \rightarrow \theta = 90^\circ$$

مسقط المتجه $\vec{A}$ على المتجه $\vec{B}$

$$\rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|B|} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|B|}$$

المتجه $\vec{A}$ ثابت ويتغير $\vec{B}$ [يجب ليوا متجه الوحدة]

حول السقط $A \cos \theta$

٩- الضرب الاتجاهي للمتجهين حاصل ضرب مقادير المتجهين $\vec{A}, \vec{B}$ فربما عملاً الزاوية بينهما

$$\rightarrow \vec{A} \times \vec{B} = AB \sin \theta \hat{n} \quad \rightarrow \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = [L] \hat{i} + [M] \hat{j} + [N] \hat{k}$$

$$\rightarrow \sin \theta = \frac{|\vec{A} \times \vec{B}|}{|A||B|}$$

$$\rightarrow \vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

$$\rightarrow \vec{A} \times \vec{B} = 0 \rightarrow A=0, B=0$$

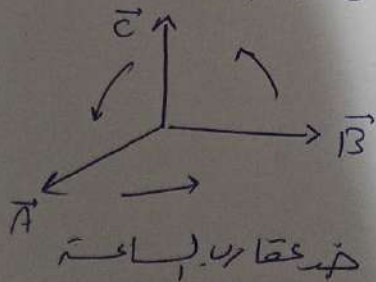
$$\rightarrow A \parallel B \quad \theta = 0^\circ \xrightarrow{\text{متوازي}} \frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z} = [L] \rightarrow \text{ثابت}$$

$$\rightarrow |\vec{A} \times \vec{B}| \rightarrow \text{مقياس الضرب الاتجاهي لمتجهين متوازيين}$$

١٠- الضرب الثلاثي القياسي

$$A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A) = C \cdot (A \times B) = [\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}] = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = [L]$$

قيمة قياسية



$$\rightarrow A \cdot (B \wedge C) \rightarrow$$

$$\rightarrow A \cdot (B \wedge C) = 0$$

على الأقل يوضح نتيجة مفردة
يوضح على الأقل متجهين متوازيين
ثلاث متجهين تقع على حتمية واحدة

حاصل ضرب المتجهات لثلاث متجهات متوازيين يساوي حجم متوازي السطوح

||- ضرب المتجهات الاتجاهي ليس ناتج العملية $[A \wedge (B \wedge C)]$ حاصل ضرب المتجهات الاتجاهي
ويتم قاسه بعجلة المحورية

(الأول. الأخير) - (الأول. الأوسط) - (الأول. الأوسط) الأخير

$$[(A \cdot C)B - (A \cdot B)C] \rightarrow$$

$$\rightarrow a^* = \frac{b \wedge c}{[a, b, c]}, \quad b^* = \frac{c \wedge a}{[a, b, c]}, \quad c^* = \frac{a \wedge b}{[a, b, c]}$$

$$\rightarrow [a^*, b^*, c^*] = \frac{1}{[a, b, c]}$$

عند إيجاد المسقط تكون الموجب عند تكون الزاوية حادة وسالبة عند
تكون الزاوية منفرجة [مثل كذا] المسقط يعطى بالموجب والسالب

محم

الباب الثاني - مجموع القوى في الفراغ

١- القوة كمية حيسية تعمل على تغير حالة الجسم من السكون أو حركة فهي من كميات التحجيسية

$$\vec{F} = p \hat{p} \quad \xrightarrow[\text{مقدار القوة}]{\text{متجه القوة}} \quad \vec{F} = p \hat{ab} = p \frac{b-a}{\sqrt{(b-a)^2}}$$

وليكه تأثير الموضع
الضلع الذي يؤثر
على القوة

* ويتم تعيين لقوة عند مصوفة [مقدار هذه القوة - اتجاه هذه القوة - نقطة تأثير هذه القوة]

٢- عزم القوة $[G]$

(١) عزم القوة حول نقطة الأصل G_o

$$G_o = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

متجه للموضع [من نقطة الأصل إلى نقطة تأثير القوة]

(٢) عزم القوة حول أي نقطة وليكن G_c



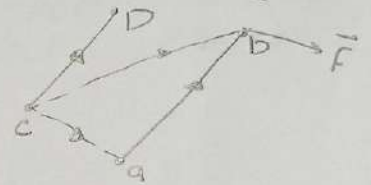
$$G_c = \vec{cb} \wedge \vec{F}$$

[العزم عند c إلى أي نقطة تؤثر على القوة]

$$G_c = \vec{ca} \wedge \vec{F}$$

وليكه $\vec{cb}$

(٣) عزم القوة حول محور وليكن G_{cd}



$$G_{cd} = \hat{e}_{cd} \cdot (\vec{cb} \wedge \vec{F})$$

متجه الوحدة للحور CD

$$\hat{e}_{cd} = \frac{\vec{D}-\vec{C}}{\sqrt{(\vec{D}-\vec{C})^2}}$$

$$\hat{e}_{cd} = \hat{e}_{cd} \cdot (\vec{ca} \wedge \vec{F})$$

$$G_{cd} = \begin{vmatrix} l & m & n \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

متجه الوحدة
النقطة من المحور إلى أي
نقطة على القوة $[cb]$
قيم $[ca]$

٣- الأزواج $[M]$

ليكون الأزواج من قوتين متساويتين في المقدار ومتعاكسين في الاتجاه مثل $p, -p$ وليكن [خط عملها ليس على استقامة واحدة]

٤- عزم الأزواج $[M]$

هو حاصل ضرب إحدى القوتين في المسافة العمودية بين خطي عملها ويتم استخدام هذا القانون بشرط أن تكون القوتين متساويتين $M = p_1 p_2 \wedge p = p_2 p_1 \wedge (-p) \rightarrow$

٥- اختزال المجموعه الى قوة وإزواج عند نقطة وليكن P

الأول عبارة اختزال عند نقطة P لانز يكون عند القوة المحصلة وعند الإزواج يحصل عند نقطة آخر [ولكنه نقطة الأصل] وبذلك نكون قد قلنا أن قانون الاختزال [ولا يتم مطابقة في المثال]

$$[1] F = F_1 + F_2 + \dots + \sum_{i=1}^n F_i$$

$$[2] M = r_1 \wedge F_1 + r_2 \wedge F_2 + \dots + \sum_{i=1}^n r_i \wedge F_i$$

$$[3] M_P = M_0 - r_P \wedge F$$

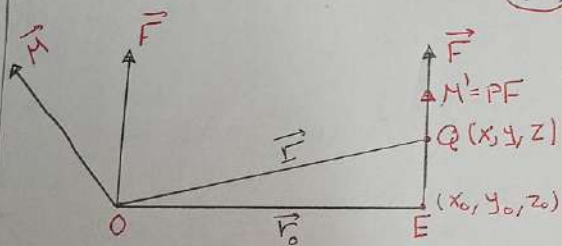
قوة محصلة ← F
نقطة الأصل إلى النقطة P ← r_P
عزم الإزواج المحصل عند نقطة الأصل ← M_0

٦- درجة اللولبية [P]

$$P = \frac{F \cdot M}{F^2}$$

عزم الإزواج المحصل عند النقطة ← M
قوة المحصلة ← F
درجة اللولبية وتطالع قيمة قياسية ← P
قيمة قياسية ← $\frac{1}{F^2}$

للحصول على درجة اللولبية P يجب أن $F \cdot M \neq 0$



٧- معادلة محور اللولبية (محور بوانسون المركزي)

لمصوفة معادلة محور اللولبية يتم استخدام قانون اختزال المجموعه الى قوة وإزواج عند نقطة الأصل

$$M' = M_0 - r \wedge F$$

$$PF = M_0 - r \wedge F$$

$$M_0 = PF + r \wedge F$$

محصول ← M_0
محصول ← PF
محصول ← $r \wedge F$
قوة المحصلة ← F
نقطة محصلة يتم تعيينها ← (x, y, z)
درجة اللولبية ← P
عزم الإزواج المحصل ← M_0

$$(M_x, M_y, M_z) = P(F_x, F_y, F_z) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

ويمكن وضع معادلة محور اللولبية على الصورة

$$\frac{x-x_0}{F_x} = \frac{y-y_0}{F_y} = \frac{z-z_0}{F_z}$$

ويمكن تعيين النقطة المجهولة $r_0 = (x_0, y_0, z_0)$ من إختلاف المثلث

$$r_0 = \frac{F \wedge M}{F^2}$$

٨- اختزال مجموعة من القوى إلى قوة وحيدة

طالما قولت اختزال يبقى يلحق من قاعدة الاختزال

حتى تختزل المجموعة إلى قوة وحيدة لازم

$$F \cdot M = 0$$

ومشاه أجيب معادلة محورها لازم

$$M' = 0$$

$$\therefore 0 = M - r \wedge F \Rightarrow \boxed{M = r \wedge F}$$

معادلة محورها

هذه خاصية

إذا كان $M = 0$ عند نقطة الأهل فإن المجموعة تكافئ قوة F تمر

$$r \wedge F = 0$$

٩- اختزال مجموعة من القوى إلى ازدواج

مجموعة القوى تختزل إلى ازدواج فقد عندما

تتلاقى القوى إلى نقطة

$$\boxed{F = 0}$$

وعند وضع $F = 0$ من معادلة الاختزال

$$M' = M - r \wedge F \Rightarrow \boxed{M' = M}$$

١٠- اتزان مجموعة من القوى

يتزن الجسم إذا انعدم كل من القوة والازدواج

$$F = 0, M = 0$$

معادلة محور اللولبية

معادلة محور اللولبية قائمة على افتراض كل $\vec{F}$ لقوة (F) وعزم الانزواج (M) عند نقطة مجهولة على محور اللولبية وليكن $[C(x, y, z)]$ ولكن شرط ايجاد معادلة محور اللولبية ان يكون الفرق لقياسي للقوة المحصلة (P) وعزم الانزواج (M) لا يساوي صفر $\leftarrow$

$\leftarrow$ وعند افتراض كل $\vec{F}$ والانزواج عند نقطة C تصبح لقوة كماله $\vec{F}$ وتغير الانزواج الى $[M']$
 $\leftarrow$ بالتعويض في قانون الاختزال $M' = PF$
 $M'_0 = M_0 - \sqrt{a} F$
 $PF = M_0 - \sqrt{a} F$

ولما قولت معادلة يبقو لازم تكونه x, y, z يعني عند C محور $\rightarrow$ معادلة محور اللولبية $M_0 = PF + \sqrt{a} F$

$$(M_x, M_y, M_z) - P(F_x, F_y, F_z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \rightarrow \text{محصول}$$

$$P = \frac{F \cdot M}{F^2}$$

وعند ايجاد كل x, y, z على مسطرة الطرفين يتم تعويض قيمه كل x, y, z في الصورة انكارتيزية

$$\frac{x-x_0}{F_x} = \frac{y-y_0}{F_y} = \frac{z-z_0}{F_z}$$

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0) = \frac{F \wedge M}{F^2}$$

وبكده ايضا تعين (x_0, y_0, z_0) مع العلاقة الانشائية وعند ايجاد (x_0, y_0, z_0) يتم وضعها على الصورة انكارتيزية

طريقة الحل بوجه طريقتين

الطريقة الاولى

- [1] $\vec{F} = F_1 + F_2 + \dots$ ايجاد لقوة المحصلة
- [2] $M = r_1 \wedge F_1 + r_2 \wedge F_2 + \dots$ ايجاد لعزم الانزواج المحصل
- [3] $P = \frac{F \cdot M}{F^2}$ ايجاد درجة اللولبية
- [4] $M + PF = r \wedge F$ يتم التعويض في معادلة اللولبية

الطريقة الثانية

- [1] $\vec{F} = F_1 + F_2 + \dots$
- [2] $M = r_1 \wedge F_1 + r_2 \wedge F_2 + \dots$
- [3] $\vec{r}_0 = \frac{F \wedge M}{F^2} = (x_0, y_0, z_0)$
- [4] $\frac{x-x_0}{F_x} = \frac{y-y_0}{F_y} = \frac{z-z_0}{F_z}$

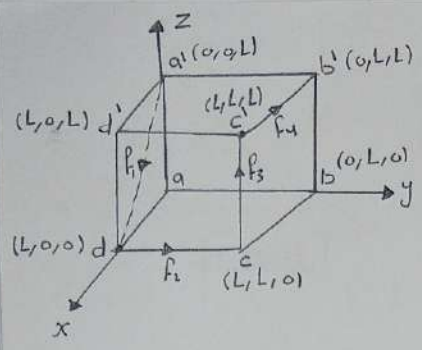
ايجاد كل x, y, z على مسطرة $\rightarrow$ راء بفرض [5] كل معادلة يتطلع هج يفرض كل معادلة بطريقا وعثر نعمل خط قوة جديد بسبب الانزواج والى هج حل يسه في الامتحان هو ان اجيب

او باحثه خدام الآلة الحاسبة $x=0$ او $y=0$ او $z=0$

[2]

مثال (١)

أربعة قوى مقاربات تتأصل مع أطوال الخطوط الممتدة لها على المكعب الميسن بالحجم أوجد اللولبية المكافئة ومطلبة محورها.



(الحل)

يقول في السؤال انه مقاربات لقوى تتأصل مع أطوال المضلع التي يتأثر عليها القوى يعني [طول ضلع المكعب يساوي (L) إذن مقدار لقوة يتأوى P] ماعدا [F1] لأن يتأثر على قطر وليس ضلع وهجسية من قاعدة صيغورت

مقدار $\rightarrow F_1 = \sqrt{2} P$ $\sqrt{2} P$ F $F_2 = F_3 = F_4 = P$

الذتين يتأثران في نقطة واحدة هي d (L,0,0) $\rightarrow F_1 = \sqrt{2} P (\hat{a} \cdot d) = \sqrt{2} P \frac{(L,0,-L)}{\sqrt{2}L} = P(1,0,-1)$
 $\rightarrow F_2 = P(d \cdot \hat{c}) = P \frac{(0,L,0)}{L} = P(0,1,0)$
 $\rightarrow F_3 = P(c \cdot \hat{c}) = P \frac{(0,0,L)}{L} = P(0,0,1)$
 $\rightarrow F_4 = P(c \cdot \hat{b}) = P \frac{(-L,0,0)}{L} = P(-1,0,0)$

$\therefore F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = P(0,1,0) = P\hat{j}$ $\rightarrow$ ①

المحطة $M_o = (L,0,0) \wedge (P_1 + P_2) + (L,L,L) \wedge (P_3 + P_4)$
 $\hat{i} \quad \hat{j} \quad \hat{k}$
 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} + P \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

قبل ما أفضل إجابة لبعض لأربع قوى كلها كل قوتين يتأثران في نفس النقطة

$M_o = P \left[[(0)\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}] + [\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}] \right] = P(\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) = P(1, -1, 2)$ $\rightarrow$ ②

كما جيت اكل مالة F, M أشوف بغير عايز إيا $P = \frac{F \cdot M}{F^2} = \frac{P(0,1,0) \cdot P(1,-1,2)}{P(0,1,0) \cdot P(0,1,0)} = \frac{P^2(0-1+0)}{P^2(0+1+0)} = -1 \neq 0$

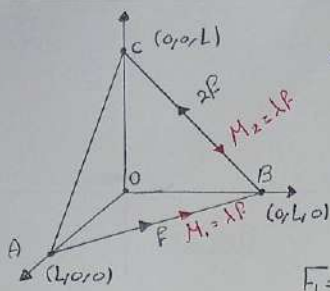
الجمعية متكافئة لولبية
 معادلة اللولبية هي:-

$M + PF = r \wedge F$
 $P(1,-1,2) + P(0,1,0) = P \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$
 $P(1,-1,2) = P[-z\hat{i} - (0)\hat{j} + x\hat{k}]$
 $P(1,-1,2) = P(-z, 0, x)$

$\therefore (1, -1, 2) = (-z, 0, x)$
 $\therefore -z = 1 \quad x = 2$
 $\therefore [z = -1] \quad [x = 2]$

الخط المستقيم الناتج يكون موازي لمحور y ولضلع مستوي xz في النقطة (2,0,-1)

مثال (2)



ثلاث أحرف متساوية ومتعامدة في إصم $OABC$
 طول كل منهم L وأثرت القوتين $P, 2P$ من المخرجين AB, BC
 على المربعين AB, CB حول المخرجين AB, CB كل منها $1P$
 أوجد درجته اللولبية المكافئة ثم أوجد لمعادلة المحور عند $\lambda = 2L$

(الجل)

$$F_1 = P \hat{AB} = P \frac{(-L, L, 0)}{\sqrt{2}L} = \frac{P}{\sqrt{2}} (-1, 1, 0)$$

$$F_2 = 2P \hat{BC} = 2P \frac{(0, -L, L)}{\sqrt{2}L} = \frac{P}{\sqrt{2}} (0, -2, 2)$$

$$F = F_1 + F_2 = \frac{P}{\sqrt{2}} (-1, -1, 2) \rightarrow ①$$

عند في سؤال ازدواجين وكل طاهر شيئاً فخالع مكيين نفس المثلثة في لقوة هائلة في الازدواجين

$$M_1 = M_1(\hat{AB}) = 1P \frac{(-L, L, 0)}{\sqrt{2}L} = \frac{1P}{\sqrt{2}} (-1, 1, 0)$$

$$M_2 = M_2(\hat{CB}) = 1P \frac{(0, -L, L)}{\sqrt{2}L} = \frac{1P}{\sqrt{2}} (0, -1, 1)$$

$$M = M_1 + M_2 + r_1 \wedge F_1 + r_2 \wedge F_2$$

$$M_0 = \frac{1P}{\sqrt{2}} (-1, 2, -1) + \frac{PL}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \frac{PL}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$M_0 = \frac{1P}{\sqrt{2}} (-1, 2, -1) + \frac{PL}{\sqrt{2}} [(0\hat{i} - 0\hat{j} + 1\hat{k}) + (2\hat{i} - 0\hat{j} + 0\hat{k})] = \frac{P}{\sqrt{2}} [(-1, 2, -1) + (2L, 0, L)]$$

$$M_0 = \frac{P}{\sqrt{2}} (2L-1, 2, L-1) \rightarrow ②$$

$$P = \frac{F \cdot M}{F^2} = \frac{\frac{P}{\sqrt{2}} (-1, -1, 2) \cdot \frac{P}{\sqrt{2}} (2L-1, 2, L-1)}{\frac{P^2}{2} (1+1+4)} = \frac{\frac{P^2}{2} (-2L+1+2L+2L-2)}{\frac{P^2}{2} \cdot 6} = \frac{-3L}{6} = \frac{-L}{2}$$

في المجموعة تكافؤ لولبية [في قيم تفويض عند $\lambda = 2L$]

$$F = \frac{P}{\sqrt{2}} (-1, -1, 2) \quad M = \frac{P}{\sqrt{2}} (0, 4L, -L) = \frac{PL}{\sqrt{2}} (0, 4, -1) \quad P = \frac{1}{2} \cdot 2L = [-L]$$

$M_0 \cdot F \sim \frac{P}{\sqrt{2}}$ طغت

$$r_0 = \frac{F \wedge M}{F^2} = \frac{PL}{2} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \frac{PL}{2} [(1-8)\hat{i} - (1)\hat{j} + (-4)\hat{k}] = \frac{PL}{2} (-7\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k}) \cdot \frac{2}{6P^2}$$

$$r_0 = (-\frac{7}{6}L, -\frac{1}{6}L, -\frac{4}{6}L)$$

$$\therefore \frac{x+7L}{-1} = \frac{y+L}{-1} = \frac{z+4L}{2} \neq$$

دامل في لقوة

$$M + PF = r \wedge F$$

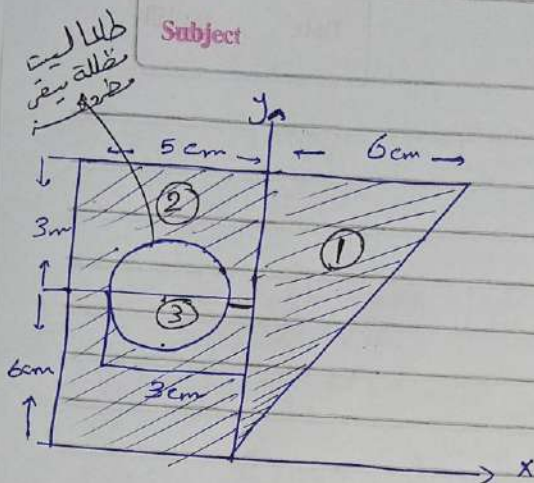
وسمكة اهل المعادلة

Subject

موضوع الدرس

Date

التاريخ



$$\bar{x} = \frac{\sum A\bar{x}}{\sum A}$$

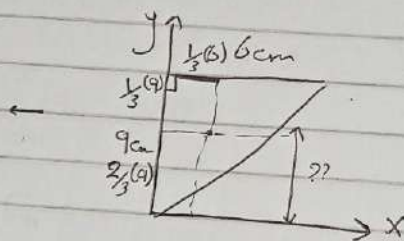
$$\bar{y} = \frac{\sum A\bar{y}}{\sum A}$$

الشكل	A	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$A\bar{x}$	$A\bar{y}$
①	27	2	6	54	162
②	45	-2.5	3	-112.5	202.5
③	-7.07	+1.5	+6	10.61	-42.42
Σ					

$$A = \frac{1}{2}(9)(6) = 27$$

$$\bar{x} = \frac{1}{3}(6) = 2$$

$$\bar{y} = \frac{2}{3}(9) = 6$$

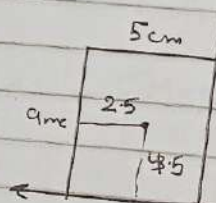


الشكل ①

$$A = (5)(9) = 45$$

$$\bar{x} = 2.5$$

$$\bar{y} = 3$$

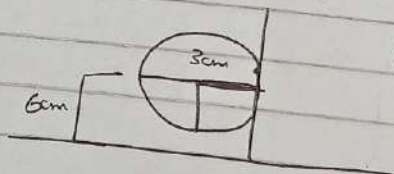


الشكل ②

$$A = 2\pi r^2 = \pi(1.5)^2$$

$$\bar{x} = -1.5$$

$$\bar{y} = 6 \text{ cm}$$



الشكل ③

إسباب الرابع: - أتران السلاسل والخيوط القابلة للارتخاء

الأكينة
مثال
هنا نوع خاص من السلاسل والخيوط وهي التي لها [قابلية تامة للتشكل والارتخاء ليحولة]

عبارة عن تعليق حبل (ذو قابلية تامة للارتخاء ومتنظم بكثافة) من نقطتين ثابتتين وأتران تحت تأثير وزنة فقط فشكل من تلك المنحنى يسمى (المنحنى الكيشنة) وله صورتان بالمعادلات المختلفة

المعادلة لنائية I $S = c \tan \psi$

المعادلة بكارتيزية II $y = c \cosh \left(\frac{x}{c} \right)$

المعادلة بارامترية III

بالنسبة لـ S $\begin{cases} x = c \sinh^{-1} \frac{S}{c} \\ y = \sqrt{c^2 + S^2} \end{cases}$

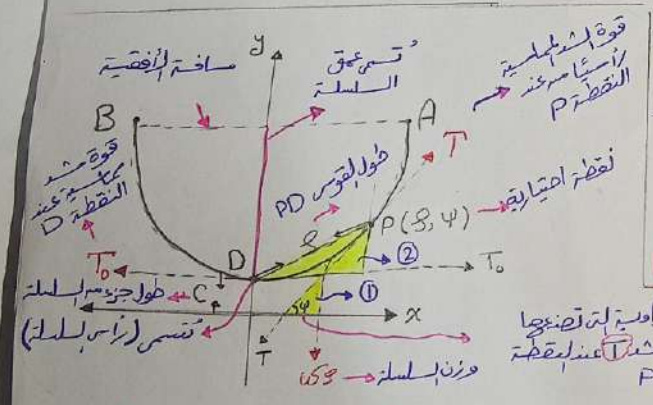
بالنسبة لـ ψ $\begin{cases} x = c \ln (\tan \psi + \sec \psi) \\ y = c \sec \psi \end{cases}$

وهذه المعادلات هي بالتفصيل

المعادلة لنائية

سلسلة مستقيمة معلقة بين نقطتين A و B تحت تأثير وزنة فقط وفيها النقطة D أسفل المنحنى عند هاليم على أفق.

نختار أي نقطة ولتكن P على السلسلة أصابعها (S, ψ) حيث S طول القوس PD



الشروط عند النقطة D

$x=0 \quad y=c \quad y'=0 \quad \psi=0$

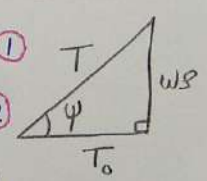
بدراسة إتران طول القوس PD

- 1 يؤثر لوزن رأسيا لأسفل مساو W_s
- 2 قوة شد T رأسيا لأعلى عند النقطة P
- 3 T_0 أفقيا عند النقطة D

بتحليل المثلث رقم 1 في منحنى الكيشنة

$\sin \psi = \frac{W_s}{T} \rightarrow T \sin \psi = W_s \rightarrow 1$

$\cos \psi = \frac{T_0}{T} \rightarrow T \cos \psi = T_0 \rightarrow 2$



لفرضه إن $T_0 = W_c$

طول جزء من السلسلة

$$L(2+n^2-1) = \frac{L}{n^2} (n+1)^2$$

$$\therefore T \cos \psi = wC$$

بالتعويض من المعادلة (2)

بقسمة ① على ②

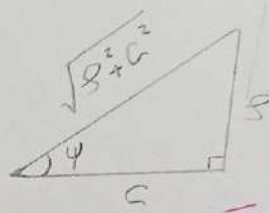
$$\frac{T \sin \psi}{T \cos \psi} = \frac{wS}{wC} \rightarrow \tan \psi = \frac{S}{C}$$

$$\text{المعادلة الإنشائية لمنحنى مكثية} \leftarrow \boxed{S = C \tan \psi} \rightarrow \text{③}$$

نحتاج شوية براهين قاعدناش لإثبات المعادلة انكارتيزية والبارامترية

$$\tan \psi = \frac{S}{C}$$

مقابل
الضلع
الثلث



من المعادلة رقم ③ نستنتج بالنسبة لـ ④

$$\frac{dS}{d\psi} = C \sec^2 \psi \rightarrow \text{④}$$

$$\frac{d}{d\psi} [\tan \psi] = \sec^2 \psi$$

$$\sin \psi = \frac{S}{\sqrt{S^2 + C^2}} \rightarrow \text{⑤}$$

$$\cos \psi = \frac{C}{\sqrt{S^2 + C^2}} \rightarrow \text{⑥}$$

نستخدم المثلث رقم ② من منحني مكثية

لـ ②

$$(dS)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

$$\frac{(dS)^2}{(dx)^2} = 1 + \frac{(dy)^2}{(dx)^2}$$

$$\frac{dS}{dx} = \sqrt{1 + (y')^2} \rightarrow \text{⑦}$$

$$\frac{dy}{dx} = y'$$

$$\sin \psi = \frac{dy}{dS} \rightarrow \text{⑧}$$

$$\cos \psi = \frac{dx}{dS} \rightarrow \text{⑨}$$

تم استنتاج جميع البراهين لاستنتاج كل 3 المعادلات انكارتيزية والبارامترية

المعادلة بكارتيزية

لأيجاد لمعادلة بكارتيزية لا بد من اختيار المحاور بكارتيزية المناسبة
لذلك باختيار النقطة الاختيارية P في الإحداثيات بكارتيزية (x, y)

علما أن المشتقة المتفاضلة تساوي ميل المماس

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \tan(\psi)$$

$$\therefore \tan(\psi) = \frac{s}{c}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{s}{c} \quad \xrightarrow[\text{النسبة لـ } x]{\text{التفاضل}}$$

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{1}{c} \frac{ds}{dx}$$

يبقى هنا نكمل
مرتين

$$\therefore \frac{ds}{dx} = \sqrt{1+y'^2}$$

رى مضاهها
مشتقة ثانية

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{1}{c} \sqrt{1+y'^2} \rightarrow dy' = \frac{1}{c} \sqrt{1+y'^2} dx$$

$$\int \frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = \int \frac{1}{c} dx \Rightarrow \sinh^{-1}(y') = \frac{x}{c} + C_1$$

لأيجاد الثابت C_1 نستخدم الشرط في النقطة D

$$x=0 \quad y=c \quad y'=0$$

$$\sinh^{-1}(0) = \frac{0}{c} + C_1 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\therefore \sinh^{-1}(y') = \frac{x}{c} \rightarrow \frac{dy}{dx} \leftarrow y' = \sinh \frac{x}{c} \quad \text{الكامل}$$

$$\int dy = \int \sinh \frac{x}{c} dx \rightarrow y = c \cosh \frac{x}{c} + C_2$$

لأيجاد C_2 نستخدم الشرط في النقطة D

$$c = c \cosh \frac{0}{c} + C_2 \quad \xrightarrow{\cosh(0)=1} \quad c = c + C_2 \rightarrow C_2 = 0$$

$$\therefore y = c \cosh \frac{x}{c} \rightarrow \# \text{ معادلة بكارتيزية لنحن مكشوفة}$$

$$4 \quad L + \frac{L}{n^2-1} = \frac{L}{n^2-1} (2+n^2-1) = \frac{L}{n^2-1} (n^2+1) \#$$

لإيجاد إحداثيات البارامترية هي إيجاد كل من x بدلالة متغير ثالث وصيغته $\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$

المعادلة البارامترية

إيجاد كل من x بدلالة s :

$$\frac{dx}{ds} = \cos \psi$$

$$\cos \psi = \frac{c}{\sqrt{c^2+s^2}}$$

$$\frac{dx}{ds} = \frac{c}{\sqrt{c^2+s^2}}$$

$$dx = \frac{c}{\sqrt{c^2+s^2}} ds$$

التكامل

$$\int dx = c \int \frac{ds}{\sqrt{c^2+s^2}}$$

$$x = c \sinh^{-1} \frac{s}{c} \#$$

توجد علاقة بين $\sinh^{-1}$ ولوغاريتمات

$$\sinh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

أو

$$\therefore x = c \ln \left(\frac{s}{c} + \sqrt{\frac{s^2}{c^2} + 1} \right) \#$$

$$\frac{dy}{ds} = \sin \psi$$

$$\sin \psi = \frac{s}{\sqrt{c^2+s^2}}$$

$$dy = \frac{s}{\sqrt{c^2+s^2}} ds$$

التكامل

$$\int dy = \int \frac{s}{\sqrt{c^2+s^2}} ds = \frac{1}{2} (2\sqrt{c^2+s^2}) = \sqrt{c^2+s^2}$$

$$y = \sqrt{c^2+s^2}$$

إذن لإحداثيات البارامترية بالنسبة لـ $\frac{s}{c}$

$$\Rightarrow x = c \sinh^{-1} \frac{s}{c} \quad \text{or} \quad x = c \ln \left(\frac{s}{c} + \sqrt{\frac{s^2}{c^2} + 1} \right)$$

بعض في السابق
الأفقية AB

$$\Rightarrow y = \sqrt{c^2+s^2}$$

14

لإيجاد كل من x, y بدلالة ψ

$$\therefore \frac{dx}{d\psi} = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{ds}{d\psi}$$

$$\frac{dx}{d\psi} = \cos \psi \cdot c \sec^2 \psi = \cos \psi \cdot \frac{c}{\cos^2 \psi} = \frac{1}{\cos \psi} = c \sec(\psi)$$

$$dx = c \sec(\psi) d\psi \xrightarrow{\text{التكامل}} \int dx = c \int \sec(\psi) d\psi \times \frac{\sec \psi + \tan \psi}{\sec \psi + \tan \psi}$$

$$\int dx = c \int \frac{\sec^2 \psi + \sec \psi \tan(\psi)}{\sec \psi + \tan(\psi)} d\psi \rightarrow$$

تفاضل لهما فربا
 $\therefore \ln(\text{مقل})$

$$x = c \ln(\tan \psi + \sec \psi) \rightarrow \#$$

$$\therefore \frac{dy}{d\psi} = \frac{dy}{ds} \cdot \frac{ds}{d\psi}$$

$$\frac{dy}{d\psi} = \sin \psi \cdot c \sec^2 \psi = \sin \psi \cdot \frac{c}{\cos^2 \psi} = \frac{\sin \psi}{\cos \psi} \cdot \frac{c}{\cos \psi}$$

$$\frac{dy}{d\psi} = c \sec \psi \cdot \tan \psi \rightarrow \int dy = c \int \sec \psi \cdot \tan \psi d\psi$$

$$\therefore y = c \sec \psi$$

$\therefore$ معادلات المعادلة البارامترية بدلالة ψ

$$x = c \ln(\tan \psi + \sec \psi)$$

$$y = c \sec \psi$$

الشعاع على نقطة في مستوى

$$\therefore T \cos \psi = w c$$

$$T = \frac{w c}{\cos \psi} = \frac{1}{\cos \psi} \cdot w c = w c \sec \psi$$

$$\therefore y = c \sec \psi$$

عنصر نقطة

$$\therefore T = w y \quad \#$$

الشعاع على نقطة

$$T = w c \quad \#$$

الشعاع على نقطة = وزن وحدة الأ طول x الطول العادي

نرى ما فرضت أنه $T_0 = w c$
 الطول العادي
 على شعاع في نقطة
 وزن وحدة الأ طول

ونكتب أنكونه خلاصنا نظري الشاير (4) #

مثال (1) إذا علقت سلسلة من نقطتين في نفس المستوى الأفقي وكان عمق السلسلة $\frac{l}{n}$ حيث l طول السلسلة. أثبت أن المسافة الأفقية بين النقطتين لتخليق تادي $\ln(\frac{n+1}{n-1})$ ثم برهن أنه النسبة بين الشعاع نقطة لتخليق إلى الشعاع على نقطة أفقية = ؟؟

$$\frac{n^2+1}{n^2-1}$$

(الحل)

الذي موجود في السؤال هو الحل مية المسألة

$$y = \frac{l}{n} + c \quad S = l$$

كأنه عنى قيمة S في داخل عنى مجهول هي c
 إجماعها مع إحدى القوانين المعادلة الكنتية

معادلة بقرينة

$$y = \sqrt{S^2 + c^2} \rightarrow y^2 = S^2 + c^2 \rightarrow (\frac{l}{n} + c)^2 = l^2 + c^2$$

$$\frac{l^2}{n^2} + \frac{2lc}{n} + c^2 = l^2 + c^2 \rightarrow l^2 - \frac{l^2}{n^2} = \frac{2lc}{n} \rightarrow l^2(1 - \frac{1}{n^2}) = \frac{2lc}{n}$$

$$c = \frac{nl}{2} (1 - \frac{1}{n^2}) = (\frac{nl}{2} - \frac{nl}{2n^2}) = (\frac{nl}{2} - \frac{l}{2n}) = \frac{l}{2} (n - \frac{1}{n}) = \frac{l}{2} (\frac{n^2 - 1}{n})$$

$$c = \frac{l}{2} (\frac{n^2 - 1}{n}) \quad \# \rightarrow \text{التعويض في المعادلة } (y = \frac{l}{n} + c) \text{ لإيجاد } (y)$$

(6)

$$y = \frac{L}{n} + \frac{L}{2n} (n^2 - 1) = \frac{L}{2n} (2 + n^2 - 1) = \frac{L}{2n} (n^2 + 1) \neq$$

$$y = \frac{L}{2n} (n^2 + 1) \quad c = \frac{L}{2n} (n^2 - 1) \quad s = L$$

للمعادلة الأفقية وهي عبارة عن AB

$$AB = B - A = (-x, \frac{L}{n} + c) - (x, \frac{L}{n} + c) = [-x - x, (\frac{L}{n} + c) - (\frac{L}{n} + c)] = (-2x, 0)$$

$$AB = \sqrt{(-2x)^2} = 2x \quad \text{معادلة بارامترية} \quad \therefore x = c \ln \left(\frac{s+y}{c} \right) \quad \leftarrow \text{يجب للمعادلة المناسبة بحيث تكون فيها كل المعطيات في المعادلة}$$

$$AB = 2x = 2c \ln \left(\frac{s+y}{c} \right) \rightarrow \text{كل ما جزيه جزيه عناه من نتائج}$$

$$① 2c = 2 \cdot \frac{L}{2n} (n^2 - 1) = L (n^2 - 1) = L \left(n - \frac{1}{n} \right)$$

$$② s+y = L + \frac{L}{2n} (n^2 + 1) = L + \frac{Ln^2}{2n} + \frac{L}{2n} = \frac{L}{2n} (2n + n^2 + 1) \\ = \frac{L}{2n} (n^2 + 2n + 1) = \frac{L}{2n} (n+1)^2 \neq$$

$$\therefore 2c \ln \left(\frac{s+y}{c} \right) = L \left(n - \frac{1}{n} \right) \ln \left(\frac{\frac{L}{2n} (n+1)^2}{\frac{L}{2n} (n^2 - 1)} \right) = L \left(n - \frac{1}{n} \right) \ln \left(\frac{(n+1)^2}{(n-1)(n+1)} \right) \\ = L \left(n - \frac{1}{n} \right) \ln \left(\frac{(n+1)}{(n-1)} \right) = L \left(n - \frac{1}{n} \right) \ln \left(\frac{(n+1)}{(n-1)} \right)$$

$$\therefore AB = L \left(n - \frac{1}{n} \right) \ln \left(\frac{n+1}{n-1} \right) \neq \quad \text{أول إشارات}$$

نسبة إشارات عند نقطة تطبيق TA إلى إشارات عند نقطة تطبيق TD

$$\frac{T_A}{T_D} = \frac{w_A}{w_D} = \frac{y}{c} = \frac{\frac{L}{2n} (n^2 + 1)}{\frac{L}{2n} (n^2 - 1)}$$

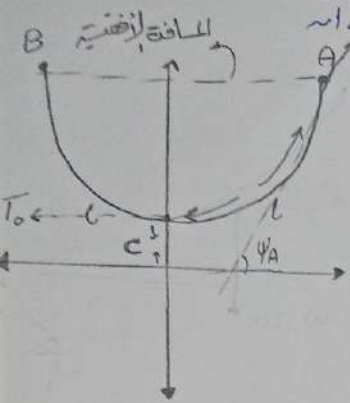
$$\boxed{\frac{T_A}{T_D} = \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1} \neq}$$

[٩]

مثال (١١)

علقت سلسلة منتظمة طولها $2L$ من نقطتين A, B من نفس المستوى الأفقي حيث كان الشد عند نقطة التعليق n أضعاف الشد عند أسفل نقطة التعليق. أوجد المسافة بين نقطتي التعليق A, B $\ln(n + \sqrt{n^2 - 1}) \frac{2L}{\sqrt{n^2 - 1}}$

(الحل)



١- نفرض أن الشد عند نقطة A T_A [الشد عند أي نقطة $T = wy$] $\rightarrow (1)$

والشد عند نقطة أسفل للنقطة D ثابت

$$T_0 = wc \rightarrow (2)$$

$$\therefore T_A = nT_0$$

$$\therefore wy_A = nwc$$

$$y_A = nc$$

$$\therefore y^2 = s^2 + c^2, \quad s = L$$

$$n^2 c^2 = L^2 + c^2 \rightarrow n^2 c^2 - c^2 = L^2 \rightarrow c^2 [n^2 - 1] = L^2 \rightarrow c = \sqrt{\frac{L^2}{n^2 - 1}} = \frac{L}{\sqrt{n^2 - 1}} \rightarrow *$$

$$\therefore y_A = nc = \frac{nL}{\sqrt{n^2 - 1}} \rightarrow **$$

المسافة الأفقية AB

$$\therefore AB = 2x = 2 \left[c \ln \left(\frac{s+y}{c} \right) \right]$$

$$AB = \frac{2L}{\sqrt{n^2 - 1}} \ln \frac{L + \frac{nL}{\sqrt{n^2 - 1}}}{L/\sqrt{n^2 - 1}} = \frac{2L}{\sqrt{n^2 - 1}} \ln \left(L + \frac{nL}{\sqrt{n^2 - 1}} \right) \cdot \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{L}$$

$$AB = \frac{2L}{\sqrt{n^2 - 1}} \ln (\sqrt{n^2 - 1} + n) \#$$

ولو طلب الشد عند نقطة التعليق T_A

$$T_A = wy_A = \frac{wnL}{\sqrt{n^2 - 1}}$$

5

سلسلة طولها $2l$ مربطة احد طرفيها في نقطة ثابتة A وربط الطرف الاخرى حلقة تنزلق على قضيب أفقي خشن يمر بالنقطة A . فإذا كان وزن الحلقة n مرات وزن السلسلة. أثبت ان أكبر بعد للحلقة عن النقطة A هو $(1 + \sqrt{1 + \lambda^2}) \frac{2l}{\lambda}$ حيث $\lambda = \mu(2n+1)$ و μ معامل احتكاك.

(الحل)

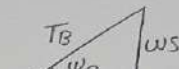
قوة الاحتكاك = رد الفعل $\times$ معامل الاحتكاك

← اتزان الحلقة عند B

$$T_B \cos \psi_B = MN \rightarrow (1)$$

$$T_B \sin \psi_B + 2nlw = N \rightarrow (2)$$

معادلتين لثلاث مجهولات



$$\cos \psi_B = \frac{T_0}{T_B} \rightarrow T_B \cos \psi_B = T_0 \rightarrow (3)$$

$$\sin \psi_B = \frac{ws}{T_B} \rightarrow T_B \sin \psi_B = ws \rightarrow (4)$$

التعويض (3) في (1) و (4) في (2)

$$T_0 = MN$$

$$ws + 2lnw = N$$

بم التعويض عن N

$$wc = MN$$

$$wc = \mu(ws + 2lnw)$$

$$wc = \mu(wl + 2nlw)$$

$$wc = \mu wl(1 + 2n)$$

$$c = \mu l(2n+1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \mu(2n+1)$$

$$\Rightarrow \boxed{c = \frac{l}{\lambda}}$$

$$\therefore s = l$$

$$y^2 = c^2 + s^2$$

$$y = \sqrt{\frac{l^2}{\lambda^2} + l^2} = l\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + 1}$$

$$AB = 2x = 2c \ln \left(\frac{s+y}{c} \right)$$

$$AB = \frac{2l}{\lambda} \ln \left(\frac{l + l\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + 1}}{\frac{l}{\lambda}} \right)$$

$$AB = \frac{2l}{\lambda} \ln \left(\lambda(1 + \sqrt{1 + \lambda^2}) \right) \cdot \frac{1}{\lambda}$$

$$AB = \frac{2l}{\lambda} \ln (1 + \sqrt{1 + \lambda^2}) \neq$$

أو يمكن امل على طول $x = c \ln \frac{s + \sqrt{c^2 + s^2}}{c}$

$$AB = 2x = \frac{2l}{\lambda} \ln \frac{l}{\frac{l}{\lambda}} + \sqrt{\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 + 1} = \frac{2l}{\lambda} \ln (1 + \sqrt{1 + \lambda^2})$$

$$\lambda = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow 1$$

الباب الخامس: - مركز الثقل [مركز الكتلة]

مركز الثقل

1- هي نقطة ثابتة يمر بها خط عمل الوزن للجسم مهما تغير موقع الجسم
[يفضل أن يكون مركز الكتلة للجسم متجمعة فيها ومركز الكتلة للجسم دائما ثابتة]

1- مركز كتلة مجموعة من الجسيمات

لإيجاد مركز الكتلة لمجموعة تتكون من n من الجسيمات ذات
كتل $m_1, m_2, \dots, m_n$ موضوعة في مجال جاذبية الأرضية g
عند النقطة $r_1, r_2, \dots, r_n$ على الترتيب فيما يلي متجهات بقوة (الوزن)
للؤثرة على هذه الجسيمات

$$F_1 = m_1 g, F_2 = m_2 g, F_3 = m_3 g, \dots, F_n = m_n g$$

وباختزال هذه المجموعة إلى نقطة الأصل

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + \dots$$

$$F = m_1 g + m_2 g + \dots + m_n g = g \sum_{i=1}^n m_i \rightarrow (1)$$

$$M_0 = r_1 \wedge F_1 + r_2 \wedge F_2 + \dots + r_n \wedge F_n$$

$$= r_1 \wedge (m_1 g) + r_2 \wedge (m_2 g) + \dots + r_n \wedge (m_n g) = \left[\sum_{i=1}^n m_i r_i \right] \wedge g \rightarrow (2)$$

من (1) و (2) نصل إلى $F \cdot M = 0$ $\rightarrow$ نحول المجموعة إلى قوة واحدة ومعالجتها

$$[r \wedge F = M_0]$$

$$\sum_{i=1}^n m_i (r_i \wedge g) = \left(\sum_{i=1}^n m_i r_i \right) \wedge g$$

$$\therefore g \wedge \sum_{i=1}^n m_i r_i = g \wedge \left(\sum_{i=1}^n m_i r_i \right) \rightarrow (r)$$

نقطة مركز الثقل (x, y, z)

$$\frac{\sum_{i=1}^n m_i r_i}{\sum m_i}$$

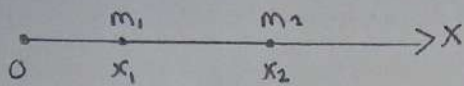
$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum m_i}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum m_i}$$

$$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum m_i}$$

$$m_1 \neq m_2$$

لوحاظ مركز النقل

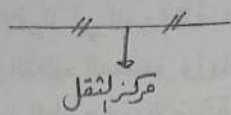


$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

المركبة X موزونة بكتلة مجموع بكتلة

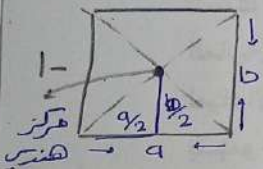
الشكل منتظم بكثافة

الأشكال (مربع - مثلث - دائرة)
 المساحات (مثلثات هندسية) (مربع - مثلث - دائرة)
 المحاور (محاور ثلاثية الأبعاد)



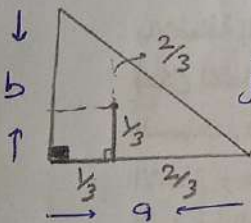
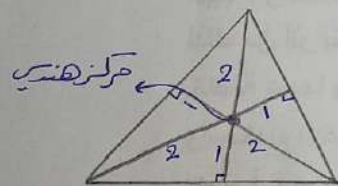
الأشكال منتظمة الكثافة - مركز ثقلها (مستطيل)

المساحات منتظمة الكثافة - مركز ثقلها (مستطيل)
 مربع
 مستطيل
 مركز النقل (نقطة تقاطع القطرين)

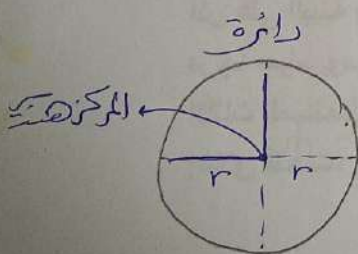


دائري على المربع والمربع مستطيل $\rightarrow (a/2, b/2)$

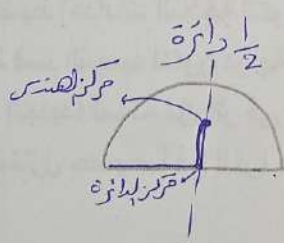
المثلث
 مركز النقل للمثلث (نقطة تقاطع المتوسطات)
 يتم تقسيم المثلث من جهة الزاوية القائمة



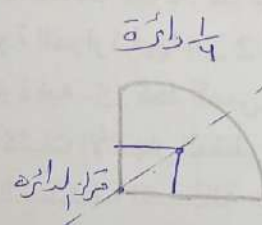
المساحة $A = \frac{1}{2} ab$
 مركز النقل $(a/3, b/3)$



$A = \pi r^2$
 نقطة مركز = (r, r)



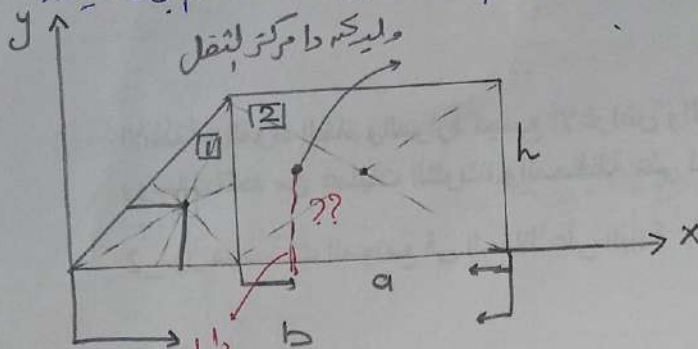
$A = \frac{\pi r^2}{2}$
 نقطة مركز النقل = $(\frac{4}{3\pi} r, \frac{4}{3\pi} r)$



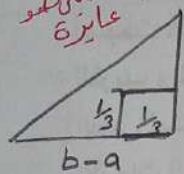
$A = \frac{\pi r^2}{4}$
 = $(\frac{4}{3\pi} r, \frac{4}{3\pi} r)$

مثال (1)

مصفوفة منتظمة السمك والكثافة على شكل منحرف حول قاعدة عرض a والارتفاع b والبعد h . فثبت ان مركز بكتلة يقع على قاعدة المنحرف على بعد $h(b+2a)/3(b+a)$ من مركز ثقل

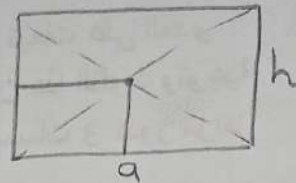


المثلث
[1]



المثلث
→ $A = \frac{1}{2} (b-a)h$
 $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{b-a}{3}, \frac{h}{3})$

المستطيل
[2]



→ $A = ah$
→ $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{a}{2}, \frac{h}{2})$

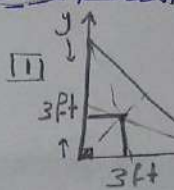
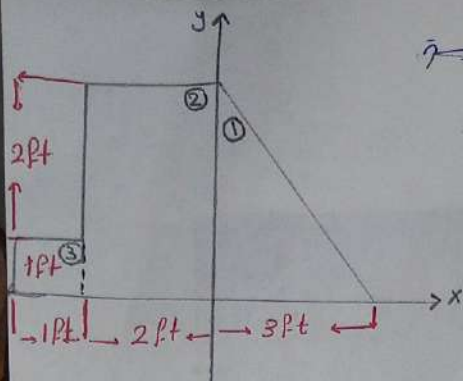
الشكل	المساحة (A)	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$A\bar{x}$	$A\bar{y}$
المثلث	$\frac{1}{2}(b-a)h$	$\frac{b-a}{3}$	$\frac{h}{3}$	$\frac{(b-a)^2 h}{6}$	$\frac{(b-a) h^2}{6}$
المستطيل	ah	$\frac{a}{2}$	$\frac{h}{2}$	$\frac{a^2 h}{2}$	$\frac{ah^2}{2}$
المجموع	$ah + \frac{(b-a)h}{2}$	x	y	$\frac{a^2 h}{2} + \frac{(b-a)^2 h}{6}$	$\frac{ah^2}{2} + \frac{(b-a)h^2}{6}$

$$\bar{y} = \frac{\sum A\bar{y}}{\sum A} = \frac{\frac{1}{2} ah^2 + \frac{1}{6} (b-a)h^2}{ah + \frac{1}{2} (b-a)h} = \frac{h^2 (\frac{1}{2} a + \frac{1}{6} (b-a))}{h (a + \frac{1}{2} (b-a))}$$

$$\bar{y} = \frac{h (\frac{1}{2} a + \frac{1}{6} b - \frac{1}{6} a)}{(a + \frac{1}{2} b - \frac{1}{2} a)} = \frac{h (\frac{1}{6} b + \frac{1}{3} a)}{(\frac{1}{2} b + \frac{1}{2} a)} = \frac{(\frac{1}{6} h (b+2a))}{(\frac{1}{2} (b+a))}$$

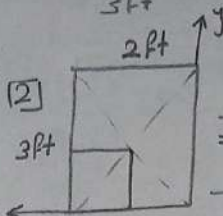
$$\bar{y} = \frac{1}{3} h (b+2a) / (b+a) \neq$$

سؤال (2) أوجد مركز الثقل للأشكال المتقطعة الكثافة الآتية



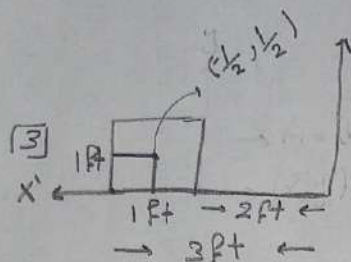
$$A = \frac{1}{2}(3)(3) = \frac{9}{2} \text{ ft}^2$$

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{3}{3}, \frac{3}{3}\right) = (1, 1)$$



$$A = (2)(2) = 4 \text{ ft}^2$$

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(-\frac{2}{2}, \frac{3}{2}\right) = \left(-1, \frac{3}{2}\right)$$



$$A = (1)^2 = 1$$

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(-\left(\frac{5}{2} + 2\right), \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

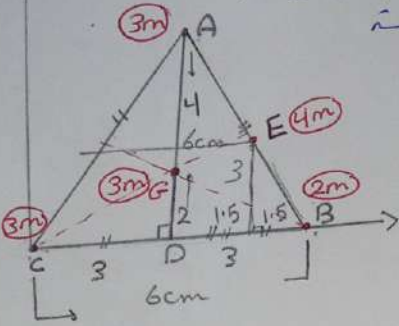
الشكل	المساحة (A)	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$A\bar{x}$	$A\bar{y}$
①	4.5	1	1	4.5	4.5
②	4	-1	$\frac{3}{2}$	-4	6
③	1	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$
المجموع	9.5	x	x	-4	11

$$\bar{x} = \frac{\sum A\bar{x}}{\sum A} = \frac{-4}{9.5} = \frac{-8}{19} = -0.42$$

$$\bar{y} = \frac{\sum A\bar{y}}{\sum A} = \frac{11}{9.5} = \frac{22}{19} = 1.16$$

مسألة (3)

ABC ضفيرة مثلثة منتظمة بسلك وكتلة كل ضلعها (3m) وفيها $AB = AC$ وارفعناها هو AD حيث $AD = BC = 6$ وضعت
 كتل 3m, 2m, 3m, 4m عند A, B, C, E على الترتيب حيث E
 منتصف AB او بمركز كتلة المجوعة



← مركز كتلة المثلث هو نقطة تلاق المتوسطات وليكن G
 ← مد عند نقطة C تتختم محوري الأضلاع بـ x, y

النقطة	الكتلة (m)	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$m\bar{x}$	$m\bar{y}$
A	3m	3	6	9m	18m
B	2m	6	0	12m	0
C	3m	0	0	0	0
E	4m	4.5	3	18m	12m
G	3m	3	2	9m	6m
Σ	15m	—	—	48m	36m

$$\bar{x} = \frac{\Sigma m\bar{x}}{\Sigma m} = \frac{48m}{15m} = 3.2m$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma m\bar{y}}{\Sigma m} = \frac{36m}{15m} = 2.4m$$